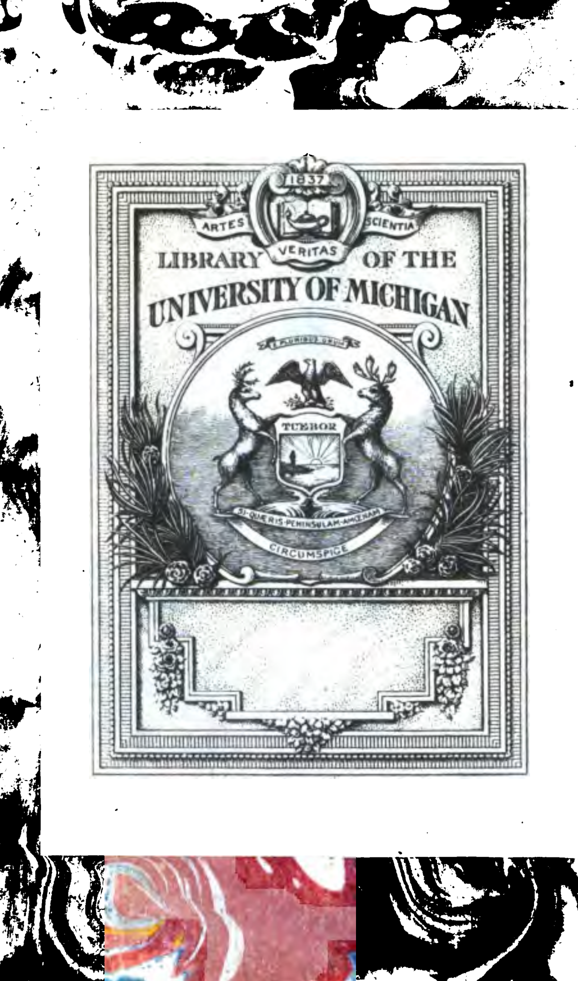
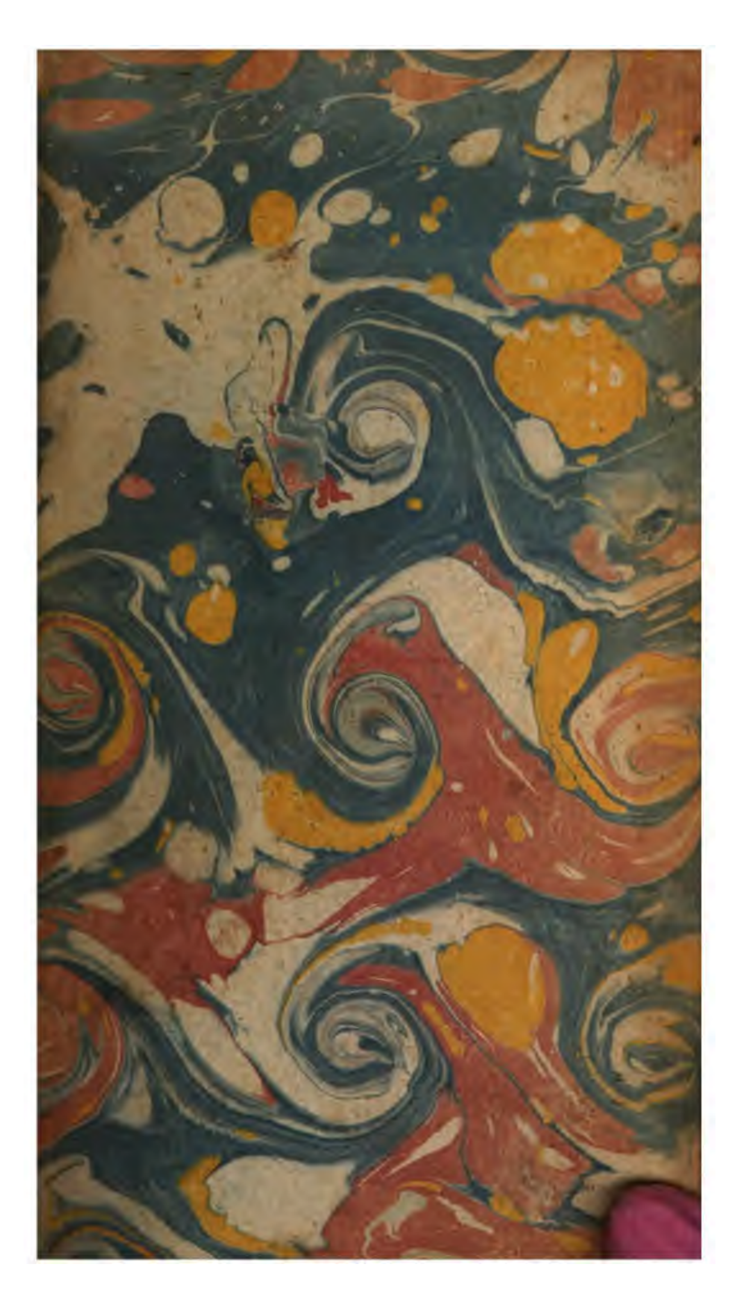

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



ENTRETIENS MATHÉMATIQUES SUR LES NOMBRES, L'ALGÉBRE,

LA GÉOMÉTRIE, LA TRIGONOMÉTRIE rectiligne, l'Optique, la Propagation de la Lumière, les Télescopes, les Microscopes, les Miroirs, l'Ombre & la Perspective.

Noël

Par le R. P. REGNAULT *de la Compagnie de* JESUS. 1683-1762

TOME SECOND.

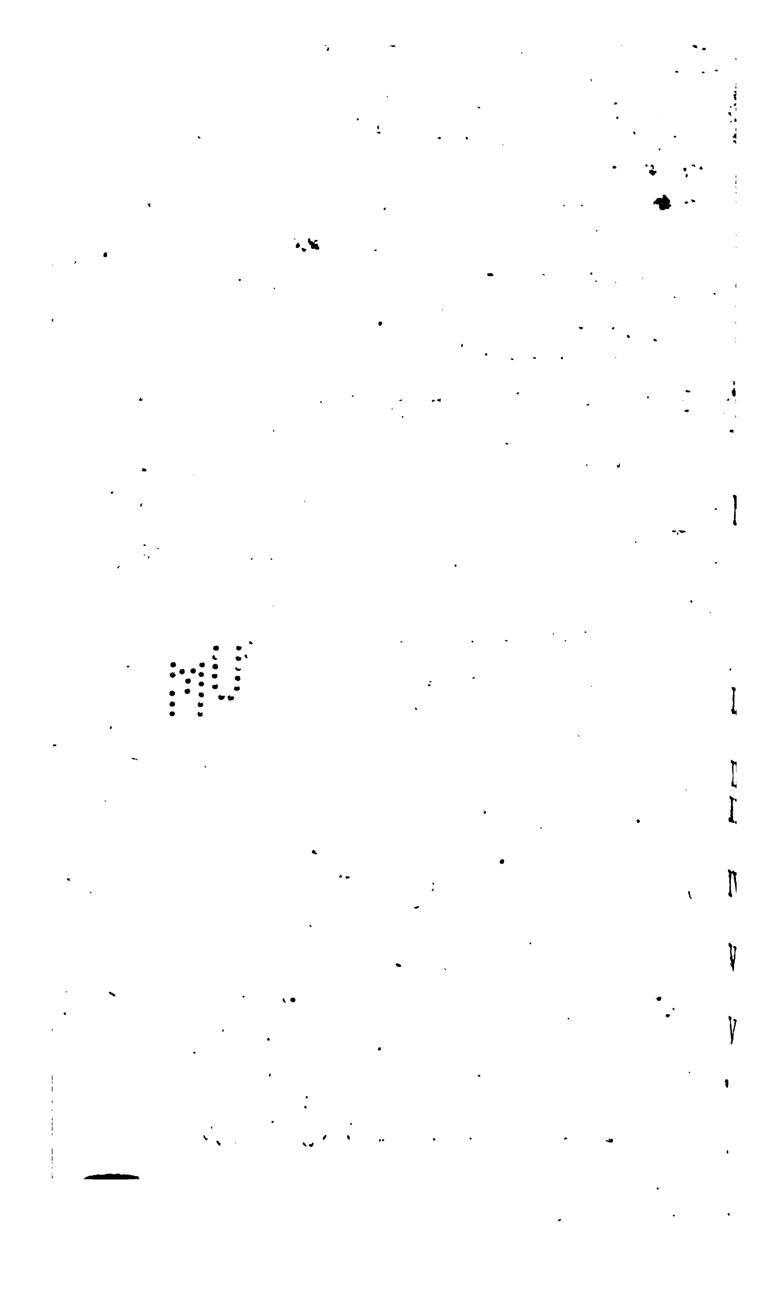


A PARIS,

Chez CLOUSIER, DAVID, Fils, DURAND, *Ruë S. Jacques.*
DAMONNEVILLE, *Quay des Augustins.*

M. DCC. XLIII.

Avec Approbation & Privilege du Roy.


MU

TABLE

DES ENTRETIENS MATHÉMATIQUES

Contenus dans le ſecond Tome.

SUR LA GÉOMÉTRIE.

I. ENTRETIEN. *SUr les Lignes.* page, 1
II. ENTRETIEN. *Sur les Angles.* 52
III. ENTRETIEN. *Sur les Triangles.* 75
IV. ENTRETIEN. *Sur les Triangles comparés enſemble.* 86
V. ENTRETIEN. *Sur les côtés proportionnels dans les Triangles.* 99
VI. ENTRETIEN. *Sur les Quadrila-*

teres. 124
VII. ENTRETIEN. *Sur les Quarrés en particulier.* 147
VIII. ENTRETIEN. *Sur les Rectangles & les Quarrés comparés ensemble.* 168
IX. ENTRETIEN. *Sur les Poligones.* 179
X. ENTRETIEN. *Sur les Poligones semblables.* 189
XI. ENTRETIEN. *Sur les Cercles en particulier.* 207
XII. ENTRETIEN. *Sur la transformation des Poligones en d'autres figures de même aire.* 220
XIII. ENTRETIEN. *Sur les Plans en general.* 229
XIV. ENTRETIEN. *Sur les Prismes & les Cylindres.* 239
XV. ENTRETIEN. *Sur les Pyramides & les Cônes.* 281
XVI. ENTRETIEN. *Sur la Sphere.* 280

SUR LA

TRIGONOME'TRIE.

I. ENTRETIEN. *SUr la valeur des Sinus & des côtés des Figures rectilignes inscrites au cercle.* page 314
II. ENTRETIEN. *Sur les Tables des Sinus, des Tangentes & des Séoantes.* 347
III. ENTRETIEN. *Sur l'usage des Sinus, des Tangentes & des Sécantes.* 363
IV. ENTRETIEN. *Sur la mesure des Plans irreguliers.* 396
V. ENTRETIEN. *Sur la maniére de lever une Carte.* 416

Fin de la Table.

ERRATA

Du second Tome.

Page 25. *ligne* 11. un équere, *lisez*, une équere, *ligne* 18. & 19. d'un équere font-long, *lisez*, d'une équere fort longue.

Page 152. *ligne* 12. ABE, *lisez*, ABC.

Page 166. *en marge*, Fig. 156, *lisez*, Fig. 157.

Page 250. *ligne* 16. de IF = B, *lisez*, de IF = B & de IK = D.

Page 372. *ligne* 16 à cause de, *lisez*, à cause des.

Page 381. *ligne* 17. BD, *lisez*, CD.

Page 384. *ligne* 7. BC, *lisez*, DC.



ENTRETIENS MATHÉMATIQUES SUR LA GÉOMÉTRIE.

I. ENTRETIEN.

Sur les Lignes.

Eudoxe. H, ARISTE, vous voilà tout environné, ce ſemble, de figures de Géométrie également nombreuſes, diſtinctes, & pour ainſi dire, parlantes.

Ariste. Ces figures, Eudoxe, je les regarde comme un des plus

précieux ornemens de mon Cabinet, parce qu'elles sont faites & rangées de manière à me rappeller tout d'un coup mes idées & mon système de Géométrie, système qui ayant été formé sur vos idées & vos écrits, doit ressembler beaucoup au vôtre.

EUDOXE. Je serai charmé que le vôtre me rappelle le mien.

ARISTE. Mais je crains que la passion que j'ai de retracer des vérités plus récentes pour moi que pour vous, ne vous cause quelque ennui.

EUDOXE. Je vois toujours avec un plaisir nouveau de longues suites de vérités naissantes les unes des autres, sur tout de vérités certaines, & qui ne laissent dans l'esprit nulle inquiétude, nulle apparence d'erreur.

ARISTE. Je m'expliquerai donc librement à la façon des Géomètres, par Axiomes ou vérités clai-

tes d'elles-mêmes, par Définitions, par Propositions, par Problêmes, allant pas à pas des vérités qui me paroîtront plus simples à celles qui le seront moins.

Eudoxe. Et si je vous interromps, si je vous propose quelques Problêmes, ce sera sans déranger le fil de vos idées.

1. *Ariste.* D'abord l'étendue comprend trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur.

2. Ainsi la Géométrie, qui consiste dans l'examen de ces dimensions, est la mesure de l'étendue.

Axiomes.

3. Ce qui est, est. Rien de plus clair; ou plutôt rien de si clair.

4. La même chose ne peut être & n'être pas au même temps.

5. Le tout est plus grand qu'une de ses parties.

6. Le tout, & ses parties prises ensemble, sont la même chose.

7. Deux grandeurs égales à une troisième sont égales entr'elles.

8. Deux grandeurs qui jointes séparément avec une troisième ou avec deux égales, font même grandeur, sont égales entr'elles.

9. A grandeurs égales, ajoutez grandeurs égales: les touts seront égaux.

10. De grandeurs égales, ôtez grandeurs égales: les restes seront égaux.

11. Deux grandeurs sont inégales, si jointes séparément avec une troisième, elles font des grandeurs inégales; & si l'on joint à une grandeur deux grandeurs inégales, la plus grande donnera la plus grande quantité. Enfin, les moitiés sont entre elles comme les touts.

Definitions.

12. Le point Mathématique

eſt une portion d'étendue ſi petite, qu'on la ſuppoſe ſans parties.

13. Une ſuite continue de points eſt une longueur.

14. La ligne eſt une longueur conſidérée préciſément comme longueur.

15. La ligne droite AB eſt la plus courte qu'on puiſſe tirer entre deux points A & B. *Fig. 1.*

16. La ligne courbe eſt une ligne qui s'écarte de la ligne droite en allant d'un point à un autre, comme ACB, ou ADB qui pour aller de A en B s'écarte vers D. *Fig. 2.*

17. La ligne circulaire ou la circonférence GHI eſt une ligne courbe qui a tous ſes points également éloignés d'un point intérieur L, qu'on nomme *centre*. *Fig. 3.*

18. Ainſi, toutes les lignes droites tirées du centre à la circonférence ſont égales; & comme le rayon LG eſt une ligne de cette

espèce, tous les rayons du même cercle ou de cercles égaux sont égaux.

19. On entend ici par cercle la circonférence ou la ligne circulaire GHI. L'arc GH en est une portion.

20. J'appelle simplement proposition, comme j'ai fait ailleurs (*a*), celle qui ne fait qu'exprimer une vérité à démontrer.

21. Je nomme Problême, une proposition qui dit quelque chose à construire & à démontrer.

Cela supposé, je commence par la recherche des propriétés de la ligne droite qui est la plus simple. La ligne droite peut être perpendiculaire, oblique, parallele.

La Perpendiculaire,

22. C'est une ligne droite qui coupe une ligne droite sans pancher. De-là,

(*a*) Calcul Littéral, N. 9.

PROPOSITION I.

23. *Chaque point de la perpendiculaire est également éloigné de deux points opposés de la ligne qu'elle coupe.*

Soit la perpendiculaire AB ou AC coupant DE par le milieu. Fig. 4.

1°. Si chaque point de AB va s'approchant de l'un des points opposés D, E, par exemple de E; AB sera perpendiculaire sans l'être, puisqu'elle panchera comme BF.

2°. Si un point seul G de la perpendiculaire AC est plus proche de l'un des points opposés, par exemple, de E; AC sera droite * sans l'être *, puisqu'elle s'écartera de la droite en G. *N.22. *N.16.

Or une chose ne peut être & n'être pas au même temps*: donc chaque point de la perpendiculaire est également éloigné de *N. 4.

deux points opposés de la ligne qu'elle coupe.

24. *EUDOXE*. Ainsi, une ligne dont chaque point est également éloigné de deux points opposés d'une ligne droite, est une perpendiculaire.

ARISTE. Sans doute.

PROPOSITION II.

25. *La position d'une perpendiculaire dépend de deux de ses points.*

Fig. 5. Si le point B, aussi-bien que le point A, se trouve également éloigné des points opposés C, D ; je dis que la droite ABE est perpendiculaire.

Voulez-vous qu'un autre point E de la droite ABE soit plus proche de C que de D, par exemple, en F ? ABE = ABF sera

*N.16. une ligne courbe * contre la supposition, puisque ABF allant de A en F, s'écartera de la droite AF, ou de la droite ABE.

Donc chacun des points de la droite ABE étant également éloigné des points opposés C,D, elle est perpendiculaire*. *N.24.

26. *EUDOXE*. Ainsi, dès que deux points d'une ligne sont également éloignés, chacun, de deux points de la ligne qu'elle coupe, tous le sont, & elle est perpendiculaire.

PROPOSITION III.

27. *ARISTE. Et si une ligne* AC *est perpendiculaire sur une ligne* DE, *celle-ci l'est sur celle là.* Fig. 6.

Comme les points A, C, sont également éloignés des points D, E*, les points D, E, le sont des points A, C : donc, de même que AC est perpendiculaire sur DE, DE l'est sur AC. *N.23.

PROBLÉME I.

28. *EUDOXE. D'un point donné* Fig. 7. A *hors d'une ligne* BC, *tirer une*

perpendiculaire sur cette ligne BC.

ARISTE. 1°. Du point donné A, comme centre, je décris un arc de cercle coupant en deux points B, C, la ligne donnée.

2°. Avec même ouverture de compas, mais plus petite que la première, je décris des deux points de section B, C, deux arcs qui se coupent dans un point D.

3°. Par les points A, D, je mene la droite ADE; & je dis qu'elle est perpendiculaire.

Le point A est également éloigné des deux points B, C *, puisque la distance de part & d'autre a pour mesure des rayons AB, AC, du même cercle. Le point D l'est de même, sa distance ayant pour mesure des rayons BD, CD, de cercles égaux, par la construction. Or une ligne qui a deux points également éloignés de deux points d'une ligne, est perpendiculaire sur cette ligne *:

* N.18.
* N.26.

donc ADE est perpendiculaire.

S'il falloit abaisser la perpendiculaire sur l'extrémité E d'une ligne CE, l'on pourroit prolonger la ligne CE en B.

PROBLÉME II.

29. EUDOXE. *D'un point donné A dans une ligne* BAC, *élever une perpendiculaire.* Fig. 8.

ARISTE. 1°. Du point A, je décris un arc qui coupe en deux points B, C, la ligne donnée.

2°. De ces points, je décris avec même ouverture de compas deux arcs qui se coupent en D.

3°. J'éleve la droite AD, & je dis qu'elle est perpendiculaire.

Le point A est également éloigné des points opposés B, C *, puisque sa distance est mesurée par les rayons AB, AC, du même cercle; le point D l'est de même par la même raison: donc AD est perpendiculaire *.

* N. 18.

* N. 28.

PROBLÉME III.

30. *EUDOXE. Diviser une ligne en deux parties égales.*

Fig. 9. *ARISTE.* 1°. Des points A, B, je décris avec même ouverture deux arcs qui se coupent en deux points C, D.

2°. J'abaisse la ligne CD, qui coupe en E la ligne donnée AB; & je dis que EB = EA.

Je tire les rayons égaux AC, *N.18. AD, BC, BD*.

Les deux points C, D sont également éloignés des points oppo- *N.18. sés A, B*: donc CED est per- *N.26. pendiculaire sur AB*: donc le point E de la ligne CED est éga- *N.23. lement éloigné des points A, B*: donc EB = EA.

EUDOXE. Par la même opération, avec même ouverture de compas, on partagera, ce semble, une ligne en 4, en 8, en 16, &c. Continuez de nous éclairer.

PROPOSITION IV.

31. *ARISTE. D'un point donné hors d'une ligne, on ne tire qu'une perpendiculaire.*

Soit AB perpendiculaire sur CD : je dis que AE ne l'est pas. *Fig. 10.*

Le point A étant également éloigné des points opposés C, D, le point E, le seroit aussi*: or, E ne l'est pas, puisqu'il se trouve entre C & B, qui l'est*: donc AE n'est pas perpendiculaire. *N. 23. *N. 23.

EUDOXE. Ainsi, deux perpendiculaires sur une même ligne étant prolongées à l'infini, ne se rencontreront jamais.

ARISTE. Autrement on abaisseroit du point de rencontre A deux perpendiculaires AB, AE, sur la même ligne CD, ce qui n'est pas possible*. *N. 31.

PROPOSITION V.

32. *D'un point donné dans une*

ligne, on n'éleve pas deux perpendiculaires.

Fig. 11. Soit AB perpendiculaire sur CD: je dis que AE ne l'est pas.

AB est également éloignée des *N. 23. points C, D *: donc AE qui se trouve entre AB & AD, panche vers D: donc AE n'est pas per- *N. 22. pendiculaire *.

L'Oblique,

Fig. 12. 33. C'est une ligne AE qui panche vers l'un des côtés de la ligne CE qu'elle rencontre.

Perpendicule AB, ou perpendiculaire, c'est ici même chose.

J'appelle éloignement du perpendicule une ligne droite BE comprise entre le pied de la perpendiculaire & le pied de l'oblique, parties du même point A.

Cela supposé;

PROPOSITION I.

34. *La perpendiculaire est la plus courte des lignes tirées d'un point à une ligne.*

Soit la perpendiculaire AB avec l'oblique AD ou AC. Fig. 13.

1°. Je prolonge AB en G, de moitié. Ainsi BA = BG.

2°. Je tire l'oblique DG; & comme BDC est perpendiculaire sur la perpendiculaire AB+BG*, DG = DA*. *N. 27. *N. 23.

Enfin, je dis que AB < AD.

ABG < ADG*: donc AB est moitié d'une ligne plus courte, & AD moitié d'une ligne plus longue, donc AB < AD. *N. 15.

PROPOSITION II.

35. *Les obliques tirées du même point sur la même ligne, sont d'autant plus longues, qu'elles sont plus éloignées de la perpendiculaire.*

Je dis que l'oblique AC > AD Fig. 13.

moins éloignée de la perpendiculaire AB.

1°. AD=DG, & AC=CG *.

*N.15. 2°. ACE > ADE *. Ainsi, *N.11. ACEG > ADEG *, car à la même chose, ajoutez choses inégales: la plus grande fait la plus grande quantité.

3°. Par le même principe, GED > GD, & par conséquent ADEG > ADG.

Donc ACEG > ADEG > ADG.

Donc AC est moitié d'une ligne plus longue, & AD, moitié d'une ligne plus courte.

Donc AC > AD.

Par conséquent, les obliques parties du même point, & également éloignées de la perpendiculaire, sont égales. De-là,

I.

Fig.14. 36. *Deux obliques* AE, AF, *appuyées sur le même point* A *d'une perpendiculaire*

perpendiculaire AB , *avec même éloignement* EB = BF *du perpendicule, ſont égales.*

AE & AF tirées du même point A, ſont également éloignées de la perpendiculaire AB, puiſque EB = FB : donc AE & AF ſont égales *. *N.35.

Dailleurs le point B de la perpendiculaire AB étant également éloigné des points E, F, puiſque EB = FB ; A l'eſt de même * : *N.32. donc AE = AF.

Par conſéquent, ſi les perpendiculaires ſont égales, & les éloignemens du perpendicule, égaux; les obliques ſont égales.

I I.

37. *S'il y a égalité de perpendiculaires avec égalité d'obliques, les éloignemens du perpendicule ſont égaux.*

Soient la perpendiculaire commune AB, & les obliques égales Fig.14.

AE, AF : je dis que $BE = BF$.

Si $BE >$ ou $< BF$, l'oblique AE $>$ ou $<$ AF*: or $AE = AF$:
*N. 35. donc $BE = BF$.

III.

Fig. 15. 38. *La perpendiculaire est la même de part & d'autre, quand les obliques sont égales, & les éloignemens du perpendicule égaux.*

Soient CE & CF, obliques égales ; BF & BE, éloignemens du perpendicule égaux : je dis que BC est la perpendiculaire de part & d'autre.

Si BC étant perpendiculaire d'une part, BCA l'étoit de l'autre, CE seroit l'oblique d'une part, tandis que FA seroit l'oblique éga-
N. 35. le de l'autre part : or, $FA > FC = CE$.

Donc BC est la perpendiculaire de part & d'autre.

De-là, si les obliques sont éga-

les, & les éloignemens du perpendicule égaux, les perpendiculaires sont égales.

IV.

39. *Si l'éloignement du perpendicule est le même, mais l'oblique plus grande, la perpendiculaire est plus grande.*

Supposons BF=BE, mais AF > CE, Je dis que AB > CB. *Fig. 15.*

1°. Si AB = CB, AF = CF = CE*. *N. 36.

2°. Si AB < CB, AF < CF, ou CE*. *N. 35.

Donc si AF > CE, AB > CB.

Enfin, venons aux paralleles.

Les Paralleles.

40. Ce sont des lignes qui étant mises à côté les unes des autres, sont également éloignées dans tous leurs points correspondants. De-là.

PROPOSITION I.

Fig.16. 41. *Dès que deux points* A, B, *d'une ligne droite* ABE, *sont également éloignés de deux points* C, D, *d'une autre* CDF *mise à côté, les deux lignes sont paralleles.*

S'il se trouvoit dans une des lignes un point G qui s'écartât, la ligne ne seroit plus droite contre
*N.16. l'hypotèse *. Donc chacune des lignes ayant tous ses points également éloignés des points correspondants de l'autre, elles sont
*N.40. paralleles *.

Par conséquent, si l'on suppose que deux lignes ayent deux points communs, ce sera même ligne.

42. EUDOXE. Ainsi, deux lignes droites ne se couperont pas en deux points: autrement, elles auroient deux points communs; & ce seroit la même ligne.

Mais avant que d'aller plus loin,

il s'agit de tirer par un point donné B une parallele à une ligne donnée x.

Ariste. 1°. Du point donné B, j'abaisse une perpendiculaire BF sur la ligne donnée x. *Fig. 17.*

2°. Sur la ligne donnée x, j'éleve une perpendiculaire GC $=$ BF.

3°. Je mene par B, C, une ligne droite z.

Et je dis que z est parallele à x.

z étant tirée par les extremités B, C, de deux perpendiculaires égales FB, GC, est également éloignée de x dans deux points, & par conséquent dans tous ses points *: donc z est parallele à x. Avançons.

*N. 41.

PROPOSITION II.

43. *Deux paralleles prolongées à l'infini ne se toucheront jamais.*

Elles seront toujours également éloignées l'une de l'autre *: donc, &c.

*N. 40.

PROPOSITION III.

Fig. 18. 44. *Deux perpendiculaires* AB, CD, *sur une ligne* EF *sont paralleles.*

Si l'une étoit inclinée vers l'autre, elles se rencontreroient, comme AD, CD; & d'un point D, l'on tireroit deux perpendiculaires DA, DC sur une ligne
*N. 31. droite EF, ce qui est impossible *.

PROPOSITION IV.

45. *Dès qu'une ligne est perpendiculaire sur deux lignes, elles sont paralleles.*

Les deux lignes jointes par une perpendiculaire sont perpendicu-
*N. 27. laires sur elle *: or deux perpendiculaires sur une ligne sont pa-
*N. 44. ralleles *.

PROPOSITION V.

Fig. 19. 46. *Entre deux paralleles* CD, EF, *une ligne perpendiculaire sur*

l'une l'est sur l'autre.

Je dis que AB perpendiculaire sur CD, l'est sur EF.

Si AB perpendiculaire sur CD, ne l'étoit pas sur EF, EF ne le seroit pas sur AB*: donc EF in- *N.27. clinée, comme GH, s'approcheroit de CD: donc CD & EF seroient paralleles sans l'être*, *N.40. ce qui ne se peut**: donc AB perpendiculaire sur CD, l'est sur **N.4. EF.

PROPOSITION VI.

47. *Deux lignes x, z, paralle-* Fig.20. *les à une troisième, y, sont paralleles entre elles.*

Soit CBD perpendiculaire sur x: elle l'est sur y parallele, & par conséquent sur z*: donc x & z *N.46. sont perpendiculaires sur CBD*: *N.27. or deux perpendiculaires sur une ligne sont paralleles*. *N.44.

Proposition VII.

Fig. 21. 48. *Enfin deux lignes droites sont paralleles, quand elles sont jointes par deux lignes droites, intermediaires, égales, dont l'une est perpendiculaire sur la première, & l'autre sur la seconde.*

Soient AB & CD égales, & perpendiculaires, AB sur la ligne S; & CD, sur la ligne T.

Je dis que S, T jointes par les intermédiaires AB, CD, sont paralleles.

Voulez-vous que T soit inclinée, comme VX? AB doit répondre à AD; & CD, à XD: or XD > AD, puisque AD étant perpendiculaire sur VX, XD est oblique *, & que l'oblique est plus longue *.

*N. 31.
*N. 34.

Donc CD sera plus grande que AB.

Voulez-vous que T soit inclinée en sens contraire? Par la même

me raison AB sera plus grande que CD.

Donc, puisque AB = CD, S & T sont paralleles.

49. *Eudoxe*. Et si deux lignes S, T, sont paralleles, il est évident que deux perpendiculaires intermédiaires AB, CD, sont égales *. Fig. 21.

*N. 40.

Cela posé, vous allez mesurer avec un Equerre ABC la hauteur ADE d'une Montagne, & la ligne horisontale EFG depuis l'extrémité inférieure E de la hauteur perpendiculaire AE jusqu'au pied G de la Montagne. Fig. 22.

Ariste. 1°. Je mets au point A du sommet l'extrémité A d'un Equerre font-long, ensorte que le côté AB soit perpendiculaire à AD, & BC à plomb, ou parallele à AD.

2°. Je mesure les côtés AB, BC.

3°. Je fais de même au point C.

4°. J'ajoute ensemble les côtés perpendiculaires & connus BC, HG; ce qui me donne la hauteur perpendiculaire ADE : car BC = AD entre mêmes paralleles
N.49. AB, CD; & par la même raison, HG = DE.

Enfin, j'ajoute ensemble les côtés AB, CH, paralleles à l'horison; & j'ai la ligne horisontale EFG, puisque AB = EF, &
N.49. CH = FG.

EUDOXE. Et après la ligne droite, je vois la ligne circulaire qui vient s'offrir.

ARISTE. Elle vient à son tour.

La ligne Circulaire.

50. C'est le cercle même regardé comme circonférence; & le cercle considéré de la sorte comprend 360 parties ou dégrés; le dégré, 60 minutes; la minute, 60 secondes; la seconde, 60 tierces, &c.

Les cercles *concentriques* A, B, sont ceux qui ont même centre C. Fig. 23.

Les cercles *excentriques* sont ceux qui ont des centres G, H, différents, comme F, K. Fig. 24.

PROPOSITION I.

51. *Les cercles plus petits ont autant de dégrés que les cercles plus grands.*

Tout cercle est divisé en 360 dégrés *, donc &c. *N. 50.

De-là, 1°. Les dégrés des plus petits cercles sont plus petits.

2°. Dans deux cercles concentriques, un dégré du plus grand répond à un dégré du plus petit.

3°. Dans les cercles concentriques D, G, chacun des arcs BC, EF, compris entre mêmes rayons HB, HC, a même rapport à sa circonférence; & les arcs BC, EF, de différente grandeur, mais qui ont même nombre de Fig. 25.

dégrés, sont *arcs semblables.*

PROPOSITION II.

52. *Le plus petit de deux cercles concentriques* B, G *est par tout également éloigné du plus grand.*

Fig. 25. Je dis que EB = FC.

EH = FH, & BE + EH = CF + FH *: donc BE = CF **; deux grandeurs qui avec grandeurs égales, font grandeurs égales, étant égales.

*N. 18. **N. 7.

Ainsi, deux cercles concentriques ne se coupent point.

PROPOSITION III.

Fig. 26. 53. *Deux cercles* T, V, *ne se touchent en dedans qu'en un point.*

Je dis que T, V, qui se touchent en A, ne se touchent point en B.

Autrement, DB & DA, qui seroient rayons du même cercle V, seroient lignes égales *: donc CDA égaleroit CDB *: car à

*N. 18. *N. 9.

grandeurs égales ajoutez même chose CD : les touts sont égaux : donc CB=CDA égaleroit CDB. Or, CB < CDB * : donc T, V, qui se touchent en A, ne se touchent point en B. *N.15.

PROPOSITION IV.

54. *Deux cercles x, z, ne se touchent en dehors qu'en un point* A. Fig.27.

Je dis que *x*, *z*, qui se touchent en A, ne se touchent point en B.

Autrement CB + BD seroit une ligne courbe égale à la droite CA + AD, formée des mêmes rayons, & entre mêmes points C, D * : ce qui est impossible **. *N.18. ** N. 15.

EUDOXE. Maintenant je voudrois comparer la ligne droite avec la circulaire.

ARISTE. Nous le ferons à l'instant.

La ligne droite comparée avec la ligne circulaire.

C'eſt ce qui demande quelques définitions ſuivies de pluſieurs propoſitions.

Définitions de la Corde & du diamétre.

Fig.28. 55. La corde AB eſt une ligne droite qui va d'un point à un autre du cercle, ſans paſſer par le centre H. La corde AB ſoutient deux arcs, un plus grand ADB, un plus petit AEB. Quand on parle ſimplement d'arc, il s'agit du plus petit.

Le diamétre FC eſt une ligne droite qui allant d'un point de la circonférence à un autre par le centre H, la diviſe en deux parties égales.

Ainſi le rayon FH eſt un demi-diamétre.

PROPOSITION I.

56. *Dans le même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs égaux AEB, GDI, ont des cordes égales.* Fig. 28.

La courbure de ces arcs égaux étant uniforme & la même*, leurs extrémités A, B, ou G, I, sont également distantes : donc les cordes AB, & GI qui mesurent ces distances égales, sont égales. *N. 18.

De-là, les arcs plus grands ont des cordes plus grandes.

PROPOSITION II.

57. *Dans le même cercle, les cordes égales soutiennent des arcs égaux.*

La courbure de la circonférence est uniforme* : donc les arcs AEB, GDI, terminés par les extrémités des cordes égales AB, GI, sont égaux. *N. 18. Fig. 28.

Donc les cordes égales soutien-

nent des arcs égaux.

De-là, des cordes plus grandes ſoutiennent des arcs plus grands.

PROPOSITION III.

Fig. 29. 58. *Une perpendiculaire* AC, *coupant la corde* DE *par le milieu* B, *coupe l'arc* DAE *en deux arcs égaux.*

Je dis que l'arc AFE = AGD.

Le point A, ainſi que le point B, de la perpendiculaire AC eſt également éloigné des extrémités
*N. 23. E, D de la corde ED *: donc les droites AE, AD, ſont cordes égales : donc elles ſoutiennent des
*N. 57. arcs égaux *: donc AFE=AGD.

59. De-là 1°. La perpendiculaire AC coupant l'arc DAE par le milieu A, coupe la corde DE de même : car le point B, ainſi que le point A, eſt également éloigné
*N. 23. des points oppoſés D, E *.

Fig. 30. 2°. Deux arcs DF, EG, en-

tre deux paralleles DE, FG sont égaux.

Car soit la perpendiculaire AC coupant par le milieu les paralleles DE, FG: les cordes AF, AG, ainsi que AD, AE, sont égales*, & les arcs *N.58. ADF, AEG, aussi-bien que AD, AE, égaux*: donc en ôtant des *N.57. arcs égaux ADF, AEG les arcs égaux AD, AE, l'on a les restes DF, EG, égaux*. *N.10.

PROPOSITION IV.

60. *La perpendiculaire* AC *qui* Fig.31. *coupe la corde* ED *par le milieu* B, *passe par le centre* F.

La perpendiculaire AC coupant la corde ED par le milieu B, passe par tous les points également éloignés des extrémités E, D de la corde*. Or le centre F *N.23. est également éloigné des points E, D, qui sont dans la circonfé-

*N.17. rence * : donc la perpendiculaire AC, &c.

Proposition V.

Fig.31. 61. *Une ligne* ABFC *qui passe par le centre* F, *&* *coupe la corde* ED *perpendiculairement, la coupe par le milieu* B.

Je dis que BD = BE.

Comme F, centre, est également éloigné des points E, D *;
*N.17. B, autre point de la perpendiculaire ABFC, l'est aussi * : donc BD = BE.
*N.23.

Proposition VI.

Fig.31. 62. *Une ligne* ABFC *qui coupe la corde* ED *par le milieu* B, *&* *passe par le centre* F, *la coupe perpendiculairement.*

ABFC a deux points également éloignés de E, D, sçavoir
*N.17. B, milieu de ED, & F, centre * : donc ABFC est perpendiculaire
*N.25. sur ED *.

PROPOSITION VII.

63. Deux cordes ne se coupent point par le milieu toutes deux. Fig. 32.

Je dis que le point de section F n'est pas le milieu des deux cordes AB, CD.

S'il l'étoit, EF tirée du centre E seroit perpendiculaire sur AB & CD *, & par conséquent AB & CD seroient perpendiculaires sur EF * : ainsi, du même point F d'une ligne EF, l'on éleveroit deux perpendiculaires FD, FB ; ce qui ne se peut * : donc F n'est pas le milieu des deux cordes. *N. 62. *N. 27. *N. 32.

PROPOSITION VIII.

64. Deux cordes AB, CD, *également éloignées du centre* E, *sont égales.* Fig. 33.

Par le centre E, je tire les perpendiculaires EH, EI : donc AH est moitié de AB, & CI, de CD *. *N. 62.

Cela posé, je dis que AH = CI, & par conséquent AB = CD.

1°. Les perpendiculaires EH, EI sont égales, mesurant des distances égales par la construction.

*N.18. 2°. L'oblique AE = CE *; ce sont rayons du même cercle.

Or les perpendiculaires étant, égales & les obliques égales, les éloignemens du perpendicule
*N.37. AH, CI, sont égaux *.

Donc AH = CI.

Par le même principe, si deux cordes sont égales, elles sont également distantes du centre : car les éloignemens AH, CI du perpendicule étant égaux, & les obli-
*N.64. ques AE, CE, égales *, les perpendiculaires EH, EI, ou les
*N.37. distances au centre E sont égales *.

PROPOSITION IX.

Fig.34. *65. Les cordes qui sont plus près du centre G, sont plus grandes.*

Je dis que AB > CD.

L'arc AC + CH + HD + DB > CH + HD. Donc AB soutient un plus grand arc que CD : donc AB > CD *. * N.56.

PROPOSITION X.

66. Le diamétre est la plus longue des lignes droites tirées d'un point à un autre du cercle.

Je dis que le diamétre AB est Fig.35. plus grand que la corde CD.

AB = CE + ED, deux demi-diamétres * : or la courbe CE + * N.55. ED > CD, droite entre mêmes points * : donc AB > CD. * N.15.

PROPOSITION XI.

67. Enfin, si la même corde AC Fig.36. *se trouve corde de deux arcs* AEC, ABC *de cercles inégaux x, z; l'arc du plus grand contient moins de dégrés que l'arc du plus petit z.*

Je dis que AEC contient moins de dégrés que ABC.

Si AEC contenoit autant de dégrés que ABC, *x* auroit dans ſon excès de grandeur plus de dé-
*N.51. grés que *z* : or *x* n'en a pas plus *.

PROBLÉME I.

Fig. 37. 68. EUDOXE. *Vous allez trouver le centre d'un cercle paſſant par trois points donnés* A, B, C.

ARISTE. D'abord je joins ces points par deux lignes droites AB, BC ; puis je tire ſur le milieu de ces droites deux perpendiculai-
*N.28. res * EF, GH, qui ſe coupent en D ; & je dis que D eſt le centre.

1°. Les perpendiculaires EF, GH, ſur le milieu des cordes AB,
*N.60. BC paſſent par le centre *.

2°. D eſt le ſeul point par où elles paſſent toutes deux, ne ſe
*N.42. coupant pas en deux points *.

Donc D eſt le centre.

Eudoxe. Mais le cercle qui passe par les points A, B, doit-il passer par C?

Ariste. Oui: DI étant perpendiculaire commune sur BC, & IB, IC, éloignemens du perpendicule égaux, par la construction, les obliques DB, DC sont rayons égaux, ou du même cercle *. *N. 18.

Problême II.

69. *Eudoxe*. *Un arc de cercle étant donné, achever le cercle.*

Ariste. 1°. Je marque trois points dans l'arc, & les joins par deux lignes.

2°. Je mene sur le milieu de chaque ligne une perpendiculaire; & le point où les perpendiculaires se coupent, est le centre *. *N. 68.

Or prenant pour rayon une ligne tirée du centre à l'arc donné, j'acheve le cercle.

De-là, 1°. Deux cercles qui ont trois points communs, les

ont tous. 2°. Deux cercles ne se coupent qu'en deux points.

PROBLÉME III.

Fig. 37. 70. *EUDOXE. Mais s'il faut trouver le centre d'un cercle donné* GBC...

ARISTE. Il suffit de tirer par le milieu I de la corde BC une perpendiculaire GH. Le milieu D de la perpendiculaire sera le cen-
* N. 60. tre *, puisque la perpendiculaire qui coupe la corde par le milieu, est un diamétre ou double rayon, dont le milieu est le centre.

PROBLÉME IV.

Fig. 37. 71. *EUDOXE. Enfin, coupons un arc* BHC *par le milieu.*

* N. 70. *ARISTE.* Du centre trouvé D *, je mene sur la corde BC une perpendiculaire DIH, qui coupe l'arc BHC en deux parties éga-
* N. 58. les *.

De-là, *les Sécantes.*

Les

Les Sécantes.

72. Ce sont des lignes qui coupent le cercle : il y a Sécantes extérieures & Sécantes intérieures. Celles-là vont d'un point extérieur couper le cercle ; celles-ci, d'un point intérieur.

PROPOSITION I.

73. *Si d'un point* A *hors du cercle, on mene sur la partie convexe plusieurs lignes ; la ligne* AB *qui prolongée passeroit par le centre* D, *est plus courte que toute autre.* Fig. 38.

Soit le rayon BD = CD * *N. 18.

Je dis que AB < AC.

AB + BD < AC + CD *. *N. 15.

Donc AB < AC * ; car si l'on joint à grandeurs égales des grandeurs inégales, celle qui donne la plus petite est la plus petite. *N. 11.

PROPOSITION II.

Fig. 39. 74. *Si d'un point* A *hors du cercle, on y mene plusieurs lignes qui le traversent jusqu'à la partie concave; la ligne* AC *qui passe par le centre* B, *est la plus longue.*

Je dis que AC > AD.

AC = AB + BD rayon égal à BC *. Or ABD > AD **.

*N. 18.
** N. 15.

PROPOSITION III.

Fig. 40. 75. *La plus longue des Sécantes intérieures* ABC, AD *est celle qui passe par le centre* B.

Je dis que ABC > AD.

ABC = ABD, puisque BC = BD *, rayon du même cercle: or ABD > AD *: donc ABC > AD.

*N. 18.
*N. 15.

PROPOSITION IV.

Fig. 41. 76. *Si de deux points* A, D, *de la circonférence, on tire deux lignes* AB, DB, *qui se coupent en dedans;*

la ligne AB qui prolongée passeroit par le centre C, est la plus courte.

Je dis que $AB < DB$.

Le rayon $AB + BC = DC$, rayon $< DB + BC$ *: donc $AB + BC < DB + BC$: donc $AB < DB$ * : car la grandeur qui jointe à la même, donne une quantité plus petite, est plus petite. *N.15. *N.11.

PROPOSITION V.

77. *D'un point B hors du centre A, on mene à la circonférence deux lignes égales.* Fig. 42.

Soit ABEF, rayon perpendiculaire sur la corde GH :

Je dis que $BG = BH$.

La perpendiculaire commune BE passant par le centre A, coupe la corde GH par le milieu * ; donc les éloignemens du perpendicule EG, EH, sont égaux, & la perpendiculaire BE est la même ; & par conséquent l'oblique $BG = BH$ *. *N.61. *N.10[illegible]

PROPOSITION VI.

Fig.43. 78. *Enfin, si une ligne droite* CE-FD, *traverse deux cercles concentriques, ses parties comprises entre les cercles sont égales.*

Je dis que CE = FD.

Du centre A, sur la corde CD, ou EF, j'éleve la perpendiculaire AB : donc BC = BD, & BE =
*N.61. BF *, puisque la perpendiculaire tirée du centre coupe la corde par le milieu.

Donc, si de BC on ôte BE, & que de BD on ôte BF ; reste
*N.10. CE = FD * : car de grandeurs égales, ôtez choses égales ; les restes sont égaux.

Et la *Tangente* vient à la suite des Sécantes.

La Tangente.

Fig.44. 79. C'est une perpendiculaire AC sur l'extrémité d'un rayon DC.

De-là, 1°. Le rayon touché eſt perpendiculaire ſur la Tangente *. *N.27.

2°. Si une perpendiculaire coupe la Tangente au point d'attouchement, elle paſſera par le centre, étant même choſe que le rayon: autrement, il partiroit du point d'attouchement deux perpendiculaires, le rayon & la perpendiculaire qu'on ſuppoſe couper la Tangente; ce qui n'eſt pas poſſible *. *N.31.

PROPOSITION I.

80. *La Tangente* ABC *ne touche le cercle que par un point* C. Fig.44.

Je dis que ſi C touche, B ne touche pas.

Le rayon DC étant perpendiculaire ſur ABC *, DB eſt oblique *: donc DB > DC **. *N.79. *N.31. **N. 34.

Donc ſi C touche, B, extrémité de l'oblique DB plus grande que DC, ne touche pas.

PROPOSITION II.

Fig.45. *81. Point de ligne droite qui passe entre la Tangente & le cercle.*

Je dis que CE tirée du point d'attouchement C entre la Tangente BC & le rayon CD, passe dans le cercle.

1°. Puisque BC est perpendiculaire sur CD, CE est oblique à
N.79. CD, & CD oblique à CE: ainsi l'on peut tirer du centre D une perpendiculaire DF sur CE.

2°. La perpendiculaire DF est
N.34. plus courte que l'oblique CD qui est rayon: donc F est dans le cercle.

Or F est un point de la ligne CE: donc CE passe dans le cercle.

PROPOSITION III.

Fig.46. *82. Entre la Tangente AB & le cercle C, on peut tirer par le point d'attouchement A une infinité de lignes circulaires.*

1°. Prolongez le rayon AD en E : & de E, comme centre, décrivez par A le cercle AFA > C, ayant le rayon plus grand.

2°. Le rayon AD + DE pouvant être prolongé à l'infini, vous ferez passer par A des cercles à l'infini, toujours plus grands, & qui n'auront qu'un point A de commun*. *N. 5 3.

Or ces cercles ne toucheront la tangente AD qu'en un point*. *N. 8.

Donc entre la Tangente & le cercle, &c.

PROBLÉME I.

83. EUDOXE. *Tirer une Tangente sur un point donné A.* Fig. 47.

ARISTE. Je mene d'abord un rayon du centre C au point donné A; puis une perpendiculaire AB sur l'extrémité A du rayon*; & AB est la Tangente*. *N. 28. *N. 79.

PROBLÉME II.

Fig. 48. 84. *EUDOXE. D'un point* D *hors du cercle, tirer une Tangente.*

ARISTE. 1°. Du centre E je tire une ligne droite ED au point donné D.

2°. Je mene une Tangente FAG par le point A, où la droite ED coupe le cercle ABC.

3°. Je décris un cercle concentrique par le point donné D.

4°. De ce point D, je tire une corde DH = FG : & je dis que DH est la Tangente qu'il falloit tirer.

Les deux cordes FG & DH étant égales par la construction; sont également éloignées du centre dans tous leurs points *:

*N. 64.

Donc elles ont même rapport au cercle concentrique intérieur ABC *.

*N. 52.

Or FG est Tangente : donc DH l'est.

85. EUDOXE. Du même point A, je tire deux Tangentes AB, AC : font-elles égales ? Fig. 49.

ARISTE. Sans doute : 1°. Même oblique AD.

2°. Eloignemens du perpendicule égaux DB, DC, rayons du même cercle *. *N. 18.

Donc les Tangentes AB, AC, qui font les perpendiculaires *, font égales *. *N 79. *N. 36.

Et après la Tangente vient le Sinus d'un arc.

Le Sinus.

86. C'est une perpendiculaire tirée de l'extrémité d'un arc ou d'un rayon sur un rayon qui termine l'autre extrémité de l'arc; AB est Sinus de l'arc AC. De-là. Fig. 50.

I.

87. *Le Sinus d'un arc étant prolongé jusqu'à la circonférence, devient corde d'un arc double.* Fig. 50.

Soit le Sinus AB prolongé en D : je dis que l'arc ACD ſoutenu par la corde ABD eſt double de l'arc AC dont AB eſt Sinus, ou que AC = CD.

Le rayon EC, qui part du centre E, coupant perpendiculairement la corde ABD perpendicu-
*N.86. laire ſur EC *, coupe l'arc ACD
*N.58. par le milieu * : donc AC = CD.

Ainſi le Sinus d'un arc eſt la moitié de la corde qui ſoutient un arc double.

II.

Fig.50. 88. *Dans le même cercle, deux Sinus égaux donnent des arcs égaux.*

Soit le Sinus AB = BD ; je dis que AC = CD.

Le rayon EC eſt une perpendiculaire, qui partant du centre, coupe la corde AB + BD par le
*N.62. milieu *, & par conſéquent l'arc
*N.58. AC + CD * : donc AC = CD.

III.

89. *Dans le même cercle, les arcs égaux donnent des Sinus égaux.* Fig. 50.

Soit l'arc AC=CD : je dis que le Sinus AB=BD.

Puisque AB est perpendiculaire sur EC*, EC l'est sur AB+BD**. Or une perpendiculaire qui coupe l'arc AC+CD par le milieu, coupe de même la corde AB+BD*, donc AB=BD.

*N. 86. **N. 27. *N. 58.

Enfin les Lignes nous ont conduits aux Angles.

Eudoxe. Et le plaisir de voir des vérités qui s'élevent comme par dégrés les unes sur les autres me rappellera bientôt dans votre Cabinet.



II. ENTRETIEN.

Sur les Angles.

EUDOXE. JE m'en ſouviens ; Ariſte ; il eſt queſtion d'Angles ; & ces figures qui parlent d'une manière ſi efficace aux yeux & à l'imagination, réveilleront nos idées, & ſoutiendront l'attention de l'eſprit.

ARISTE. Commençons par quelques définitions.

Fig 51. 90. La ſurface eſt une étendue conſidérée préciſément comme longue & large.

La ſurface plane ou le plan CD eſt une ſurface dont toutes les parties ſont tellement ſituées, qu'une ligne droite qui tourneroit deſſus immédiatement, en toucheroit tous les points également ſans obſtacle.

Ainſi le plan eſt compoſé de lignes droites & paralleles, qui ne s'écartent en aucun ſens.

C'eſt le contraire dans la ſurface courbe AB. Fig. 52.

91. Un plan borné par une ligne circulaire eſt un cercle entier EFGHI. Fig. 53.

Le demi-cercle EFGI eſt la partie du cercle terminée par la moitié EFG de la circonférence, & par le diamétre EIG.

Le quart de cercle EIF eſt la quatrième partie du cercle, & par conſéquent il a pour meſure de ſa grandeur un arc de 90 dégrés *.

*N. 50.

92. L'angle plan ABC dont il s'agit, eſt une ſurface comprise entre deux lignes écartées d'une part, & réunies de l'autre en un point B, qui eſt le ſommet de l'angle. Fig. 54.

L'angle mixte eſt formé par une ligne droite & une ligne courbe.

Les deux côtés AB, CB de l'angle rectiligne, dont il est question, sont des lignes droites.

L'angle se désigne par trois lettres A, B, C; dont la seconde soit au sommet, ou par une seule B qui soit au sommet.

Si les côtés d'un angle sont prolongés après la section, il se forme des angles ABC, DBE, opposés au sommet B.

Fig. 55. 93. La mesure d'un angle est l'arc qui a pour centre le sommet de cet angle, & pour rayons les côtés du même angle.

Qu'un rayon AB fasse un tour sur un centre B: tandis que l'extrémité A décrit la circonférence ACIE; un point quelconque F du rayon BA décrit une ligne circulaire concentrique FGH. Delà, tandis que l'extrémité A décrit un arc AC d'une quantité déterminée, qui soit, par exemple, la quatrième partie de la circon-

férence, le point F décrit un arc FG ſemblable, ou qui eſt la 4e. partie d'une ligne circulaire concentrique FGH : donc la ſurface, l'ouverture, ou la grandeur de l'angle ABC, formée d'arcs ſemblables à l'arc correſpondant AC de la circonférence répond à cet arc: & par conſéquent la meſure d'un angle eſt l'arc qui a pour centre le ſommet, & pour rayon, les côtés de l'angle.

Ainſi, les angles qui contiennent des arcs égaux, ou ſemblables, ſont égaux.

L'angle droit ABC a pour meſure un arc de 90 dégrés, & c'eſt un quart de cercle *. *N.91.

L'angle eſt-il plus petit qu'un angle droit? c'eſt un angle aigu CBD. Plus grand qu'un angle droit? c'eſt un angle obtus ABD.

Si une oblique coupe deux paralleles, il ſe forme des angles aigus & des angles obtus en de- Fig. 56.

dans & en dehors ; les uns *internes* ; les autres *externes*. Les aigus internes F, G, ou externes K, L, comparés ensemble, sont *alternes* ; les obtus H, I, ou M, N, de même. F, N, ou G, M sont *internes de même côté*.

Il y a des angles qui ont leur sommet au centre, d'autres qui ne l'ont pas.

EUDOXE. Hé bien, comparons-les successivement, mesurons les uns & les autres, voyons-en les différentes propriétés.

ARISTE. Nous le ferons dans quelques propositions, dont les précédentes répandront la lumière sur les suivantes.

Des Angles qui ont leur sommet au centre.

PROPOSITION I.

Fig. 57. 94. *Deux Angles droits* ABC,

ABD, *valent, pris ensemble, un demi-cercle.*

Chacun vaut un quart de cercle, ayant pour mesure un arc de 90 dégrés *. Donc les deux, pris ensemble, ayant pour mesure la demi-circonférence CAD, valent un demi-cercle. *N 93.

De-là, 1°. Toutes les lignes CB, FB, EB, GB, &c. qui tomberont d'une part sur le milieu B du diamétre, formeront des angles, qui tous ensemble, vaudront deux droits, ayant pour mesure la demi-circonférence.

2°. Quatre angles droits ABC, ABD, CBE, DBE, valent le cercle.

PROPOSITION II.

95. *Une perpendiculaire sur une ligne fait avec elle deux angles droits.* Fig. 58.

Soit AB perpendiculaire sur CD : je dis que les angles ABC, ABD, sont droits.

De B, je décris le demi-cercle CEAFD, dont le diamétre est
*N.55. CB + BD *.

La corde AC = AD, puisque le point B de la perpendiculaire AB étant également éloigné des points opposés C, D, par la con-
*N.23. struction, le point A l'est aussi * :
*N.57. donc l'arc AEC = AFD *, puisque les cordes égales soutiennent des arcs égaux : ainsi, chacun est de 90 dégrés, moitié de la demi-circonférence CAD ; & les angles ABC, ABD, ayant pour mesure un arc de 90 dégrés, cha-
*N.94. cun ; sont droits *.

De-là, un angle de 90 dégrés, ou formé par deux perpendiculaires, c'est même chose, c'est-à-dire, un angle droit.

PROPOSITION III.

Fig. 58. 96. *Une ligne* AB, *qui fait avec une autre* CD *deux angles droits, est perpendiculaire.*

Puisque les cordes AC, AD soutenant des arcs égaux dans l'hypothèse, sont égales *, le point A est également éloigné des points C, D ; le point B l'est aussi *, puisque BC & BD sont rayons du même cercle : donc AB qui a deux points également distans, chacun, de C, D, est perpendiculaire *. * N. 56. * N. 18. * N. 25.

PROPOSITION IV.

97. *Les deux angles* ABC, CBD, *faits par une oblique* CB *sur une ligne droite, valent deux droits.* Fig. 59.

Pris ensemble, ils ont pour mesure la demi-circonférence ACD décrite du centre B, mesure de deux droits * : donc ils valent deux droits. * N. 94.

PROPOSITION V.

98. *Deux Angles opposés au sommet sont égaux.* Fig. 59.

1°. Les aigus ABE, CBD, sont égaux * : car joints séparé- * N. 8.

ment avec le même obtus ABC,
*N.97. ils valent deux droits *.

2°. Les obtus ABC, DBE sont égaux par la même raison.

*N.93. 3°. Tous les droits sont égaux *.

Donc les angles opposés au sommet sont égaux.

Sinus des angles, ou des arcs,
*N.93. mesures des angles *, c'est même chose.

Cela posé,

Proposition VI.

99. *Deux angles de même espèce qui ont les Sinus égaux, sont égaux.*

Ces angles ont pour mesure
*N.88. des arcs égaux *, puisque les Sinus égaux donnent des arcs égaux: donc ils sont égaux.

Proposition. VII.

100. *Les angles égaux ont des sinus égaux.*

Ces angles ont pour mesure

des arcs égaux : or les arcs égaux donnent des ſinus égaux *. *N.56.

PROPOSITION VIII.

101. *Une oblique* BC *entre deux paralleles* AB, CD, *fait les angles alternes égaux.* Fig.60.

Je dis d'abord que les alternes aigus ABC, BCD * ſont égaux. *N.93.

1°. De B, décrivez l'arc CE; & de C, l'arc BF : ce ſont deux arcs de cercles égaux, puiſqu'ils ont même rayon, BC = CB.

2°. Tirez les perpendiculaires CA, BD : elles ſont ſinus des angles * ABC, BCD, & ces ſinus ſont égaux étant perpendiculaires entre mêmes paralleles *. *N.86. & 98. *N.40.

Ainſi les angles ABC, BCD, ont des ſinus égaux, & par conſéquent des arcs égaux *. *N.88.

Donc ayant meſures égales ; ils ſont égaux.

Je dis en ſecond lieu que les

Fig.61. alternes obtus BCG, CBH ſont égaux.

L'obtus BCG avec l'aigu BCD
* N.97. vaut deux droits *.

L'obtus CBH avec l'aigu ABC
* N. 101. = BCD *, vaut auſſi deux droits.

Donc les obtus BCG, CBH
* N. 8. ſont égaux *, puiſque deux grandeurs, qui jointes ſéparément avec grandeurs égales, ſont grandeurs égales, ſont égales.

PROPOSITION IX.

Fig.60. 102. *Deux lignes* AB, CD, *ſont paralleles lorſqu'une ligne* BC *qui les coupe, fait les angles alternes égaux.*

1°. Les angles alternes ABC, BCD, étant égaux, les arcs CE, BF, qui en ſont la meſure, & par conſéquent les Sinus CA, BD,
* N.89. ſont égaux *.

2°. Ces deux Sinus égaux ſont
* N.86. deux perpendiculaires égales *,

qui joignant les deux lignes AB, CD, ſont meſures égales de leurs diſtances.

Donc AB & CD ſont paralleles *. *N.40.

PROPOSITION X.

103. *Enfin, ſi une oblique* EF *coupe deux paralleles, les angles internes* B, D, *de même côté valent deux droits.* Fig.62.

Les angles B & A valent deux droits *: or l'angle D = A alterne *. *N.97. * N. 101.

Donc B & D valent deux droits.

104. De-là, 1°. Les angles aigus E, D, de même côté ſont égaux : car l'angle alterne D = A *, & A = E oppoſé au ſommet *. * N. 101. *N.97.

2°. Les angles obtus de même côté B, F, ſont égaux de même, puiſque F + D, ainſi que B + E = D, vaut deux droits *. *N.97.

Fig. 63. 105. 3°. Si deux angles intérieurs ABC, BCD, de même côté valent moins que deux droits, les lignes AE, DF, coupées par l'oblique BC, ne ſont point paralleles, & par conſéquent elles ſe rencontreront.

106. *EUDOXE*. Mais comment partagez-vous un angle en deux également?

Fig. 64. *ARISTE*. 1°. Du ſommet B, je décris un arc AEC.

2°. Je mene la corde AC.

3°. Du centre B, je tire une perpendiculaire BDE ſur la corde *N. 28. AC*.

Et je dis que l'angle ABE = EBC.

La perpendiculaire BDE partant du centre B, coupe par le *N. 61. milieu D la corde AC*, & par *N. 58. conſéquent l'arc AEC*: donc l'arc AE = EC: donc l'angle ABE = EBC, ayant même arc pour meſure.

107. EUDOXE. Et s'il faut diviser un quart de cercle AEC, ou un arc de 90 dégrés, en deux parties égales..... *Fig. 64.*

ARISTE. 1°. Du centre B, je fais un angle ABC dont les côtés comprennent l'arc AEC.

2°. Je partage cet angle en deux également *; & l'arc AEC est coupé par le milieu. *N. 106.

108. EUDOXE. Ou d'un point donné A dans une ligne droite AB, faire un angle égal à un angle donné CDE.... *Fig. 65.*

ARISTE. 1°. Du sommet D de l'angle donné, je décris un arc CE compris entre ses côtés. Puis, avec même ouverture de compas, du point donné A, je décris un arc BFG.

2°. Tirant cordes égales CE, BF, j'ai arcs égaux CE, BF *. *N. 17.

Enfin, je mene de F en A la droite FA; & l'angle BAF = CDE *, puisqu'ils ont pour me- *N. 93.

ſure arcs égaux, par la conſtruction.

Fig.66. 109. EUDOXE. Enfin, d'un point donné F hors d'une ligne BC, tirons une ligne qui faſſe avec elle un angle donné D.

ARISTE, 1°. J'éleve ſur la donnée BC une ligne BE faiſant avec elle un angle CBE égal à l'angle

* N. 108. donné D *.

2°. Du point donné F, je tire une ligne FA parallele à la ligne

* N. 42. élevée BE *. Et l'angle FAC formé par la parallele & la ligne donnée eſt l'angle qu'il falloit faire: car l'angle FAC = EBC = D; puiſque deux paralleles coupées par une oblique, font les angles aigus du même côté égaux *.

* N. 104.

EUDOXE. Après cela, je vous livre à vous même.

ARISTE. Nous paſſerons donc à d'autres angles, employant encore & Définitions, & Propoſitions, & ſi vous le voulez, Problêmes.

Les Angles qui n'ont pas leur sommet au centre.

Ce ſont des angles qui ont leur ſommet à la circonférence, entre la circonférence & le ce ntr , ou hors de la circonférence.

DÉFINITIONS.

110. Angle au centre ABC eſt un angle dont le ſommet B eſt au centre. Fig. 67.

Angle inſcrit ADC ou à la circonférence, eſt celui dont le ſommet D ſe trouve à la circonférence, & les côtés AD, CD dans le cercle.

Angle circonſcrit EFG eſt un angle hors du cercle, mais dont les côtés touchent le cercle. Fig. 68.

111. Petit Segment P, c'eſt la plus petite portion du cercle compriſe entre la corde & la circonférence; *grand Segment* G, la plus grande.

Angle du petit Segment ABC, eſt un angle formé par la Tangente AB & la corde BC, & qui comprend le petit Segment P.

L'Angle du grand Segment CBD eſt fait par la Tangente BD & la corde BC, & comprend le grand Segment G.

BEC *eſt angle dans le petit Segment*; BFC, *dans le grand.*

Proposition I.

112. *L'Angle du petit Segment a pour meſure la moitié de l'arc ſoutenu par la corde.*

Fig. 69. Soient la corde BC parallele au diamétre EF, & le diamétre perpendiculaire GH, qui paſſant par le centre I, & coupant perpendiculairement le diamétre EF auſſi-bien que la corde BC parallele *, coupe le diamétre EF, la corde BC & par conſéquent l'arc BGC par le milieu *.

* N. 46.
* N. 61. & 58.

Je tire le rayon IB perpendiculaire sur la Tangente AB *; & je dis que l'angle ABC a pour mesure l'arc BG, moitié de BGC. *N.79.

1°. L'Angle ABI est droit*, étant formé par la Tangente AB & le rayon perpendiculaire. *N.93.

L'Angle EIG est droit aussi, puisqu'il est fait de même par deux perpendiculaires IG, IE. Voilà deux angles égaux.

2°. L'Angle CBI dans le premier, & l'angle BIE dans le second sont égaux*, étant alternes. Otez des deux droits, égaux, les deux alternes égaux : les restes ABC, BIG sont égaux*. * N. 101. *N.10.

Or l'angle au centre BIG a pour mesure l'arc BG*. *N.93.

Donc l'angle ABC l'a de même.

PROPOSITION II.

113. *L'Angle du grand Segment*

a pour mesure la moitié de l'arc du grand Segment.

Fig. 69. Je dis que l'Angle CBD a pour mesure l'arc BH, moitié de l'arc BHC.

L'Angle CBD = CBI + IBD; or CBI = BIE alterne *, & IBD = EIH droit aussi : donc CBD = BIE + EIH.

* N. 101.

Mais BIE + EIH a pour mesure l'arc BH *:

* N. 93.

Donc l'Angle CBD a pour mesure l'arc BH.

PROPOSITION III.

Fig. 70. 114. *L'Angle à la circonférence ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC sur lequel il est appuyé.*

Les trois Angles ABD, CBE, ABC, pris ensemble, ont pour mesure la valeur de la demi-circonférence *.

* N. 94.

Or ABD a pour mesure la moitié de l'arc AB; & CBE, la moi-

é de l'arc BC* : donc ABC * N. 118.
pour mesure la moitié de l'arc
AC, ces trois moitiés faisant la
demi-circonférence.

115. De-là, 1°. Tous les Angles inscrits, ou à la circonférence, appuyés sur le même arc sont égaux, ayant même mesure.

2°. L'Angle à la circonférence ABC appuyé sur le diamétre est droit, puisqu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence, ou la valeur de 90 dégrés. Fig. 71.

Eudoxe. Et cela peut donner, ce semble, une manière d'élever une perpendiculaire sur l'extrémité B d'une ligne AB. Fig. 72.

Ariste. Oui : car d'un centre C pris à volonté, intervale CB, décrivez un cercle qui coupe la ligne AB, passant par l'extrémité B.

Ensuite tirez un diamétre DCE par le point D, où le cercle coupe la ligne donnée AB.

Elevez enfin, sur l'extrémité B la ligne BE, & BE sera la perpen-
*N.93. diculaire *, puisque l'angle DBE sera droit, étant appuyé sur le diamétre DCE.

PROPOSITION IV.

116. *L'Angle au centre est double de l'Angle à la circonférence appuyé sur le même arc.*

L'Angle au centre a pour me-
*N.93. sure l'arc sur lequel il est appuyé *; l'Angle à la circonférence, la
* N. 114. moitié de cet arc *: donc l'Angle, &c.

PROPOSITION V.

Fig.73. 117. *Un Angle* ABC, *dont le sommet* B *se trouve entre la circonférence & le centre* G, *a pour mesure la moitié de l'arc* AC, *sur lequel il est appuyé d'une part, & la moitié de l'arc* DE *compris entre ses côtés prolongés de l'autre.*

Soient

Soient BD, BE, prolongemens; & EF parallele à BC.

Je dis que l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc DE.

L'angle AEF a pour mesure la moitié de l'arc AF *, & par conséquent la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc CF ou de l'arc DE = CF entre mêmes paralleles *. * *N.* 114. *N.* 30.

Or l'angle ABC = AEF *. puisque les angles aigus de même côté d'une oblique coupant deux paralleles, sont égaux. * *N.* 104.

Donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc DE.

PROPOSITION VI.

118. *Un angle* ABC, *dont le sommet* B *est hors du cercle, mais dont les côtés le traversent, a pour mesure la moitié de l'arc concave* AC, *moins la moitié de l'arc convexe* DE. Fig. 74.

Soit DF parallele à BC.

Je dis que l'angle ABC a pour mesure la moitié de AC, moins la moitié de DE.

L'angle ADF a pour mesure
* N. la moitié de AF *, ou la moitié
114. de AC, moins la moitié de FC
*N.30. = DE *; donc ADF a pour mesure la moitié de AC, moins la moitié de DE.

Or l'angle ABC = ADF, au-
* N. tre aigu de même côté *.
104. Donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de AC, moins la moitié de DE.

PROPOSITION VII.

Fig.75. 119. *Enfin, l'angle circonscrit* ABC, *ou formé par deux Tangentes, a pour mesure la moitié de l'arc concave* ADC, *moins la moitié de l'arc convexe* AEC.

Tirez CD parallele à BA.

Je dis que l'angle ABC a pour

mesure la moitié de l'arc ADC, moins la moitié de AEC.

L'angle DCF ayant pour mesure la moitié de l'arc CD*, a pour mesure la moitié de ADC, moins la moitié de AD, ou de AEC = AD*. Or l'angle ABC = DCF*: donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc ADC, moins la moitié de AEC.

* N. 112.
* N. 30.
* N. 104.

Ainsi les angles nous conduisent naturellement aux Triangles.

Eudoxe. Et j'en verrai les propriétés avec le même plaisir, le plutôt qu'il me sera possible.

III. ENTRETIEN.

Sur les Triangles.

Ariste. Vous le sçavez, Eudoxe, nous nous sommes engagés à parler des Triangles.

EUDOXE. Sans doute ; & en montant toujours par dégrés, vous allez nous éclairer de plus en plus.

ARISTE. Laiſſons-là les paroles ſuperfluës ; la Géométrie les proſcrit, leur préférant la préciſion & la ſimplicité de ſes Définitions, de ſes Propoſitions, de ſes Problêmes.

DEFINITIONS.

120. On appelle figure un eſpace renfermé de tous côtés.

Le Triangle eſt une figure de trois côtés, ou de trois angles.

Six ſortes de Triangles, eu égard aux côtés & aux angles.

Fig.76. Le Triangle Scalene B a ſes trois côtés inégaux.

Fig.77. L'Iſocele C a deux côtés égaux.

Fig.78. L'Equilateral D a ſes trois côtés égaux.

Fig.79. Le Triangle rectangle E a un angle droit.

L'Obtusangle F a un angle obtus. Fig. 80.

L'Acutangle G a trois angles aigus. Fig. 81.

La base d'un Triangle est le côté opposé à l'angle formé par les deux autres côtés.

Dans le Triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit se nomme spécialement l'Hypoténuse, souvent la Base.

La hauteur d'un Triangle est une perpendiculaire tirée d'un angle sur le côté opposé, considéré comme base.

Si les trois angles d'un Triangle ont leur sommet, chacun, dans la circonférence d'un cercle, le Triangle est *inscrit*, & le cercle *circonscrit*.

L'angle extérieur ABC est un angle formé par le prolongement BC d'un des côtés du Triangle ABD. Fig. 82.

121. Cela supposé, commen-

Fig. 83. çons par circonscrire un cercle au Triangle ABC.

1°. Ayant pris les sommets A, B, C, pour trois points donnés joints par les deux lignes AB, BC, je tire sur le milieu des deux lignes deux perpendiculaires EF, GH

*N. 42. qui se coupent dans un point D *.

2°. Du point de section D, comme centre, je décris par les

*N. 68. sommets A, B, C, un cercle *;

* N. 120. & c'est le cercle circonscrit *.

PROPOSITION I.

122. *Les trois angles d'un Trian-*

Fig. 84. *gle, pris ensemble, sont égaux à deux droits.*

Les trois angles A, B, C, du Triangle inscrit, ont pour mesure la moitié des trois arcs AB, BC, CA, sur lesquels ils sont ap-

* N. 114. puyés *, & par conséquent la valeur de la demi-circonférence :

*N. 94. donc *, pris ensemble, ils sont égaux à deux droits.

Ainsi la valeur des trois angles

d'un Triangle eſt de 180 dégrés, valeur de 2 droits.

De-là, 1°. Le Triangle n'a qu'un angle obtus ou droit ; puiſque s'il en avoit deux, il vaudroit plus de 180 dégrés, par conſéquent il a deux angles aigus ; & ſi deux côtés ſont perpendiculaires l'un ſur l'autre, le 3e. eſt incliné ſur les deux, faiſant avec eux deux angles aigus.

2°. Le Triangle peut avoir trois angles aigus : car trois angles aigus de 60 dégrés chacun, valent deux droits précisément, ou 180 dégrés.

3°. Dès que l'on connoît deux angles d'un Triangle, on connoît le troiſième.

De 180 dégrés, valeur des trois angles du Triangle, ôtez la ſomme des deux angles connus : le reſte eſt la valeur du troiſième.

PROPOSITION II.

123 *Dans un Triangle, deux* Fig. 85.

côtés, pris ensemble, sont plus grands que le troisième.

Je dis que AB + BC > AC.

AB + BC est ligne courbe; & AC ligne droite entre mêmes points A, C: donc AB + BC
N.15. > AC.

PROPOSITION III.

Fig.86. 124. *Dans un Triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle; & le plus grand angle, au plus grand côté.*

1°. Le plus grand côté AC sou-
N.57. tient le plus grand arc ADC, me-
N.93. sure du plus grand angle ABC; donc le plus grand côté AC est opposé au plus grand angle ABC.

2°. Le plus grand angle ABC a pour mesure le plus grand arc ADC soutenu par le plus grand
N.56. côté AC: donc le plus grand angle ABC est opposé au plus grand côté AC.

125. De-là, 1°. Les angles op-

posés à côtés égaux sont égaux, & les côtés opposés à angles égaux, sont égaux.

2°. Si un angle compris entre deux côtés déterminés croît, l'arc & le côté opposé croîtront; & par conséquent, si l'angle droit BFC, par exemple, devient l'obtus BFD, le second côté opposé BD sera plus grand que le premier BC. *Fig. 87.*

3°. Si d'un point B dans le cercle, mais hors du centre F, on tire plusieurs lignes BC, BD, à la circonférence, la ligne la plus proche de la perpendiculaire BFE qui passe par le centre, ou qui est la plus longue *, est plus longue que la plus éloignée, puisque BD > BC. *N. 75.

4°. D'un point B hors du centre F, on tire bien deux lignes égales *: aussi F centre, & point de la perpendiculaire FB, étant également éloigné des points C, *N. 77.

N.23. G; le point B l'eſt: donc BG = BC: mais on ne tire que deux lignes égales, puiſque BD > BC.

PROPOSITION IV.

Fig.88. 126. *Dans le Triangle Scalene* FGH, *les trois angles* F, G, H *ſont inégaux.*

* N. 120. Les trois côtés le ſont*, & par * N. 125. conſéquent les trois angles*.

PROPOSITION V.

127. *Dans le Triangle Iſocele* Fig.89. IKL, *les deux angles* I, L, *ſur la baſe ſont égaux.*

Les deux côtés IK, KL, op- * N. 120. poſés à ces angles, étant égaux*, les angles le ſont*.

* N. 125. De-là, 1°. Dans le Triangle Iſocele, point d'angle obtus ou droit ſur la baſe; autrement les deux angles ſur la baſe feroient obtus ou droits; & par conſéquent les trois angles du Triangle vaudroient plus de deux droits; ce * N. 122. qui n'eſt pas poſſible*.

2°. Dès que les deux angles sur la base sont égaux, le Triangle est Isocele, les côtés opposés étant égaux.

Eudoxe. Cela ne vous donne-t-il pas une maniére de mesurer une hauteur accessible AB? Fig. 9.

Ariste. Oui, je m'éloignerai du pied A de la hauteur AB jusqu'à ce que la distance AC fasse avec le rayon visuel CB terminé par la cime B une angle de 45 dégrés, observé sur un demi-cercle dont la base sera dirigée parallelement à l'horison vers A, & l'Alidade, ou la régle mobile, vers B; la distance AC sera égale à la hauteur AB: car l'angle BAC étant droit, & l'angle ACB de 45 dégrés, l'angle ABC sera de 45 dégrés aussi *: donc l'angle ABC = ACB: donc les côtés opposés AB, AC seront égaux *. Ainsi la mesure de la distance AC, sera la mesure de la hauteur AB.

* 1 122.
* 1 125.

Proposition VI.

Fig. 91. 128. *Dans le Triangle équilateral ABC, les trois angles sont égaux.*

* N. 120. Puisque les trois côtés le sont *, les trois angles le sont *.
* N. 125.

Eudoxe. Je vois assez comment vous faites sur une ligne donnée un Triangle équilateral.

Fig. 92. Ariste. Ayant décrit des points B, G, intervale BG, ou GB = BG, deux cercles qui se coupent en C, je tire des centres B, G, deux lignes BC, GC; & le Triangle BCG formé de ces deux lignes & de la ligne donnée, est
* N. 120. équilateral *, puisque ses côtés, étant rayons de cercles égaux, sont égaux.

Eudoxe. Mais s'il faut mesurer une distance inaccessible MO par le moyen d'un Triangle équilateral....
Fig. 93.

Ariste. Dirigeant la base d'un demi-cercle vers O, & l'Alidade

vers N, je fais d'abord l'angle NMO de 60 dégrés; puis sur la même ligne MN, dirigeant la base vers M & l'Alidade vers O, je fais de même l'angle MNO de 60 dégrés : donc l'angle MON est aussi de 60 dégrés*, puisque 60 pris trois fois, fait 180, valeur du Triangle : donc les trois côtés MN, NO, MO sont égaux*, les trois angles étant égaux.

* N. 122.

* N. 125.

Ainsi connoissant le côté accessible MN, que je toise, je connois la distance inaccessible MO = MN.

PROPOSITION VII.

129. *Enfin l'angle extérieur au Triangle est égal aux deux intérieurs opposés, pris ensemble.* Fig. 94.

Je dis que l'angle ABD = A + C.

Les deux angles A & C avec le troisième ABC valent deux droits* : or l'angle ABC avec

* N. 122.

l'angle ABD, vaut aussi deux droits*, puisqu'une oblique AB fait deux angles égaux à deux droits.

*N. 97.

Donc l'angle ABD = A + C*.

*N. 8.

Voilà les Triangles considérés & en général & en particulier. Les comparerons-nous?

Eudoxe. Volontiers; & dès ce soir, vous me reverrez.

IV. ENTRETIEN.

Sur les Triangles comparés ensemble.

Eudoxe. HE bien, Ariste, n'ai-je pas tenu ma parole?

Ariste. Je voudrois, Eudoxe, être en état de répondre à cet empressement &....

Eudoxe. Venons d'abord au fait.

DÉFINITIONS.

130. *Ariste.* Deux Triangles font *équiangles* ou *ſemblables*, quand les angles de l'un ſont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

131. Deux Triangles ſont égaux lorſqu'ils ont les angles égaux & les côtés égaux, chacun à chacun.

132. Un Triangle eſt circonſcrit au cercle quand ſes trois côtés touchent le cercle, comme il eſt inſcrit lorſque ſes trois ſommets touchent le cercle.

PROPOSITION I.

133. *Dans deux Triangles, ſi deux angles de l'un ſont égaux à deux angles de l'autre; le troiſième angle eſt égal au troiſième.*

Autrement, la valeur des trois angles de l'un des Triangles ne ſeroit pas la même que la valeur

des trois angles de l'autre ; or elle
* N. est la même *.
122. De-là, 1°. Dès que deux angles
d'un Triangle sont égaux à deux
angles d'un autre, les deux Trian-
* N. gles sont semblables *.
130. 2°. Si l'angle du sommet est le
même dans deux Triangles Isoceles, ils sont semblables : car les
deux angles sur la base de l'un ou
* N. de l'autre étant égaux *, si les an-
120. gles, sur la base de l'un, étoient
plus grands ou plus petits que les
angles sur la base de l'autre, la valeur des trois angles des deux
Triangles ne seroit pas la même.

PROPOSITION II.

134. Dès que deux Triangles ont leurs côtés égaux, ils sont semblables.

Si les côtés sont égaux, les an-
* N. gles le sont * : donc les deux
125. Triangles sont semblables *.
* N. 30.
De-là, si deux Triangles ont
les

les côtés égaux, ils le sont entiérement.

PROPOSITION III.

135. *Si deux Triangles rectangles* ABC, ADC, *ont base commune* AC, *& un côté égal à un côté; le second côté est égal au second côté.* Fig. 95.

Soit le cercle ABCD circonscrit au Triangle ABC, dont AC est diamétre*, puisque l'angle ABC est droit : le cercle passera par le point D, puisque l'angle ADC est droit aussi; soit enfin le côté AB=AD. * N. 115.

Je dis que le côté BC=CD.

Les arcs AB & AD soutenus par cordes égales sont égaux *. *N. 57.

Donc les arcs BC & CD, complemens au demi-cercle, sont égaux : donc les côtés BC, CD sont cordes égales* : donc le côté BC=CD. *N. 56.

Ainsi, les deux Triangles sont égaux *. * N. 134.

PROPOSITION IV.

136. *Si deux Triangles* ABC, Fig. 96.

DEF, *ont un angle égal, & les côtés qui le comprennent, égaux ; le troisième côté est le même.*

Soient l'angle B = E, le côté AB = DE, & le côté BC = EF : je dis que le côté AC = DF.

Mettez les côtés AB, BC, sur les côtés DE, EF : ils conviendront: tous les points se trouveront sur tous les points correspondants, B sur E, A sur D, C sur F :

Donc la distance, la base, ou le côté AC = DF.

Ainsi, les deux Triangles ABC, * N. DEF sont égaux *.

134. Fig. 97. *EUDOXE*. Vous mesurez apparemment sur ce principe une distance BC qui n'est accessible que par ses extrémités B, C.

ARISTE. 1°. Regardant d'un point D les extrémités B, C, je prens l'angle D, puis la longueur de ses côtés DB, DC.

2°. Ecarté dans la campagne,

Je fais un angle E = D, & prens les côtés EF, EG, égaux aux côtés DB, DC :

Donc le troisième côté FG = BC*. * N. 136.

Donc en toisant la distance FG accessible, j'aurai la distance inaccessible BC.

PROPOSITION V.

137. *Si deux Triangles ont un côté égal, & les angles sur ce côté égaux ; ils ont les deux autres côtés égaux.* Fig. 98.

Soient le côté *ab* = AB ; l'angle *a* = A, & *b* = B :

Je dis que le côté *ad* = AD, & *bd* = BD.

Mettez *abd* sur ABD :

1°. *ab* & AB conviendront, puisque *ab* = AB.

2°. *ad* parti comme AD, du même point A, tombera sur AD, puisque l'angle *a* = A, ou *bad* = BAD.

3°. *bd* parti comme BD, du même point B, tombera sur BD, puisque l'angle *b* = B, ou *abd* = ABD.

Le point *d* tombera donc sur le point D.

Or les lignes droites entre mê-
* N. 15. mes points sont égales *.

Donc *ad* = AD, & *bd* = BD.

Ainsi les deux Triangles, ABD,
* N. *abd* sont égaux *, ayant & les an-
134. gles & les côtés égaux.

EUDOXE. Mais s'il est question
Fig. 99. de mesurer une distance AB accessible par une extrémité B, inaccessible par l'autre A, par exemple, la largeur d'une riviere ou d'un étang....

ARISTE. 1°. Prolongez la distance inconnue AB, par une ligne indéfinie BC.

2°. Tirez une perpendiculaire BD, sur l'extrémité B de l'incon-
* N. nue AB*; & mesurez l'angle ADB
115. formé par la perpendiculaire BD

& le rayon visuel DA terminé par l'autre extrémité A *. *N. 93.

3°. Du sommet D de cet angle, menez une ligne DE, qui coupant AC fasse un angle BDE = ADB.

Enfin, mesurez le prolongement BE.

Je dis que BE = AB.

L'angle droit EBD = ABD droit aussi *; & l'angle BDE = *N. 954. BDA, par la construction. Donc les deux Triangles BED, BAD, ayant un côté commun BD, & les deux angles sur ce côté, égaux, ont tous leurs côtés égaux *. * N. 137.

Donc BE = AB.

PROPOSITION VI.

138. *Dans le Triangle isocele, la perpendiculaire* AB, *abaissée du sommet* A *de l'angle compris entre les deux côtés égaux* AC, AD, *partage le Triangle en deux égaux.* Fig. 100.

Je dis que le Triangle ABC = ABD.

Les deux angles C, D, sur la base étant égaux*, aussi-bien que les deux angles droits en B*, les deux autres BAC, BAD, le sont. Donc les deux Triangles ABC, ABD, ont un côté égal, & les angles sur ce côté, égaux : donc le Triangle ABC = ABD*.

* N. 127.
* N. 95.
* N. 137.

Ainsi la perpendiculaire AB coupe la base CD, & l'angle CAD du sommet en deux également, puisque le côté BD = BC, & que l'angle BAD = BAC.

PROPOSITION VII.

Fig. 101. *139. Si deux Triangles ont même base, l'angle* ABC *du sommet dans celui qui est enfermé, est plus grand que l'angle* ADC *du sommet dans celui qui l'enferme.*

Je dis que l'angle ABC > ADC.

Soit CB prolongée en E.

L'angle extérieur ABC = BAE + AEB, intérieurs opposés * ; & par la même raison, l'angle AEB ou AEC, = ECD + EDC, ou ADC ; donc l'angle ABC > AEB > ADC : donc l'angle ABC > ADC. * N. 129.

PROBLÉME I.

140. EUDOXE. *Inscrire dans le cercle S un Triangle semblable à un Triangle donné ABC.* Fig. 102.

ARISTE. 1°. Je tire la Tangente DFE *. *N. 83.

2°. Je fais l'angle DFG = C, & l'angle EFH = B *. * N. 108.

Puis je mene GH, & dis que le Triangle inscrit GFH est équiangle au Triangle ABC.

L'angle GHF a pour mesure la moitié de l'arc FG *, mesure de l'angle DFG = C * : donc l'angle GHF = C. * N. 114. * N. 111.

Par la même raison, l'angle

FGH = EFH = B : donc l'angle FGH = B.

Donc le Triangle GFH ayant deux angles égaux à deux angles du Triangle ABC, lui est équian-
* N. 33. gle *.

PROBLÉME II.

Fig. 103. 141. EUDOXE. *Circonscrire au cercle un Triangle semblable à un Triangle donné* ABC.

1°. Je tire le rayon DE, & fais
* N. 108. l'angle EDF = BCG *, puis l'angle EDH = BAI.

2°. Après avoir mené la corde EF, je mene par les points E, F, H, les Tangentes KL, LM,
* N. 83. MK *.

Et je dis que le Triangle KLM est semblable au Triangle ABC.

Les angles de deux Triangles
* N. 122. pris ensemble, valent 4 droits *.

Or puisque DE & DF sont per-
* N. 79. pendiculaires sur les Tangentes *, l'angle LEF avec FED vaut un droit,

droit, aussi-bien que l'angle LFE avec EFD.

Donc l'angle ELF avec EDF vaut deux droits.

Mais l'Angle EDF = BCG, par la construction ; & l'angle BCG avec BCA vaut deux droits * ; donc l'angle ELF = BCA. *N. 97.

Par la même raison, l'angle EKH = BAC, & par conséquent l'angle HMF = CBA *. * N. 133.

Donc KML est le Triangle semblable, qu'il falloit circonscrire.

PROBLÉME III.

142. *EUDOXE. Inscrire un cercle dans un Triangle* ABC. Fig. 104.

ARISTE. 1°. Je partage les angles BAC, ACB par le milieu, tirant les lignes AD, CD *. * N. 106.

2°. Du point de rencontre D, je mene les perpendiculaires DE,

DF, DG, ſur les côtés du Trian-
N.28. gle ABC.

3°. Du même point D, & de l'intervalle d'une des perpendiculaires, je décris un cercle EFG ; & je dis que EFG eſt le cercle inſcrit.

1°. Les angles AED, AGD ſont droits, & par conſéquent égaux, étant formés par les per-
N.93. pendiculaires DE, DG.

2°. Les angles DAE, DAG ſont égaux auſſi, par la conſtruction ; donc les deux Triangles
* N. 133. ADE, ADG ſont ſemblables*, & par conſéquent ayant un côté
* N. 137. commun AD, ils ſont égaux*. Ainſi DE=DG, & par la même raiſon, DE=DF.

Donc DE, DG, DF ſont rayons égaux : donc EGF eſt le cercle inſcrit.

Il s'agit maintenant d'examiner en détail & de plus près, les rapports des côtés proportionnels

dans les Triangles comparés. Ne ſera-ce pas l'occaſion de vous revoir ?

EUDOXE. Au premier jour.

V. ENTRETIEN.

Sur les côtés proportionnels dans les Triangles.

ARISTE. VOus me trouvez, Eudoxe, arrangeant des lignes & des figures, afin que placées dans un certain ordre, elles réveillent dans mon eſprit des idées ſuivies.

EUDOXE. Et me voilà tout diſpoſé à voir ces idées éclore, pour ainſi dire, les unes des autres.

ARISTE. Allons donc encore pas à pas, par Définitions, par Propoſitions, que vous aſſaiſonnerez de Problêmes.

DÉFINITIONS.

143. *Espaces parallèles*, sont des espaces compris entre lignes paralleles.

Les lignes ou les côtés qui ont des rapports égaux, sont *proportionnels* (*a*).

Dans les Triangles semblables, on appelle côtés *homologues*, ou de même nom, ceux qui sont opposés aux angles égaux.

PROPOSITION I.

Fig. 105. 144. *Deux obliques, qui dans des espaces paralleles égaux, font mêmes angles, sont égales.*

Soient A & B, espaces paralleles égaux; CG = EH, perpendiculaire mesurant la distance de deux paralleles; l'angle CDG = EFH.

Je dis que l'oblique CD = EF.

Les angles CDG, EFH étant

(*a*) Calcul Littéral, N. 107 & 111.

égaux, aussi-bien que les angles CGD, EHF, qui sont droits *, * N. 95.
l'angle C = E *. * N. 133.

Ainsi les deux Triangles DCG, FEH, ayant un côté égal, sçavoir, CG = EH, & les deux angles sur ce côté, égaux, sont égaux *: donc CD = EF. * N. 137.

De-là, deux obliques AE, CF, qui dans des espaces paralleles inégaux font mêmes angles E, F, sont inégales. Fig. 106.

Je dis que AE > CF.

Prenez sur AB la partie AH = CD perpendiculaire de même; & tirez par H la ligne GH parallele à la base EB.

1°. L'angle AHG = CDF, droit aussi.

2°. L'oblique, qui coupe deux paralleles, faisant les angles aigus de même côté égaux *, l'angle AGH = E = F. * N. 104.

Donc les Triangles GAH, FCD, sont égaux *: donc AG = CF. * N. 137.

Donc AG + GE, ou AE, > CF.

PROPOSITION II.

Fig. 107. 145. *Une parallele* AB *coupant la perpendiculaire* DE *par le milieu, coupera de même l'oblique* FG *dans le même espace* DFEG.

Soit DA = AE ; je dis que FB = BG.

1°. Les espaces paralleles mesurés par les perpendiculaires égales DA & AE sont égaux.

2°. Les obliques FB, BG font
* N. 104. mêmes angles en B, G*, puisque l'oblique totale FG fait les angles aigus de même côté égaux.

Or les obliques, qui dans des espaces paralleles égaux font mê-
* N. 144. mes angles, sont égales*. Donc FB = BG.

De-là, 1°. La parallele HK coupant la perpendiculaire DE aux trois quarts, coupe l'oblique FG de même : car HK coupant

AE par le milieu H, coupe BG par le milieu K*. * N. 145.

2°. La parallele LN coupant la perpendiculaire DE au quart, coupe l'oblique FG de même : car LN coupant DA par le milieu L, coupe FB par le milieu N.

3°. Par conséquent, si la perpendiculaire est plus grande ou plus petite, l'oblique l'est à proportion.

PROPOSITION III.

146. *Une ligne parallele* AB *divisant un espace parallele* DFEG, *coupe la perpendiculaire* DE *& l'oblique* FG *proportionnellement.* Fig. 108.

Je dis que DA, AE :: FB, BG.

Si DA = AE, FB = BG; & si DA > ou < AE, FB > ou < BG à proportion*. * N. 145.

Donc DA, AE :: FB, BG (*a*).

147. De-là, Dans deux espa-

(*a*) Calcul Littéral, N. 109.

ces paralleles égaux ou inégaux, les lignes également inclinées sont entr'elles comme les perpendiculaires.

PROPOSITION IV.

Fig. 109. 148. *Si deux obliques sont également inclinées dans des especes paralleles différents x, z, & que deux autres obliques soient également inclinées aussi ; les quatre sont proportionnelles.*

Soient DE, IK, perpendiculaires ; OP & QR également inclinées, aussi-bien que FG & LM.

Je dis que OP. QR : : FG. LM.

OP. QR : : DE. IK, & FG.
* N. 146. LM : : DE. IK * : or deux raisons égales à une troisième sont egales entre elles (*a*) : donc OP. QR : : FG. LM.

Fig. 110. 149. De-là, 1°. Si l'on coupe deux côtés AB & BC d'un Triangle par une ligne DE parallele

(*a*) Calcul Littéral, N. 104.

à la base AC, les quatre parties sont proportionnelles.

Tirez FG parallele à DE, & par conséquent à AC *: Je dis *N.47. que BE. EC : : BD. DA.

BE & EC sont également inclinées dans deux espaces paralleles, aussi-bien que BD & DA, puisque les angles aigus de même côté BED, BCA fait par l'oblique BC, sont égaux, aussi-bien que BDE, BAC *. * N. 104.

Donc * BE. EC : : BD. DA. * N. 148.

2°. Si les quatre parties des deux côtés coupés dans le Triangle ABC sont proportionnelles, la ligne coupante est parallele à la base. Fig. 111.

Si BD. DA : : BE. EC, je dis que DE est parallele à AC.

Voulez-vous que DE soit oblique? je tire DH parallele à AC: donc BD. DA : : BH. HC*; ce qui est faux, puisque BD. DA : : BE. EC par l'hypothèse, & que BE * N. 149.

a moindre raiſon à EC, que BH HC (*a*).

Donc DE eſt parallele à AC.

PROPOSITION V.

Fig. 112. 150. *Dans les Triangles ſemblables, les côtés homologues ſont proportionnels.*

Soient les Triangles ſemblables ABC, DEF, entre paralleles différentes AC & GH, DF & IK, avec les perpendiculaires BL, EM.

Les angles A & D ſont égaux par l'hypothèſe, auſſi-bien que C & F: donc les obliques AB, DE ſont également inclinées, auſſi-bien que BC, EF.

Cela poſé, je dis que AB. DE :: BC. EF.

AB. DE :: BL. EM :: BC.
* N. 147. EF *: or deux raiſons égales à une troiſième ſont égales entr'elles (*b*):

(*a*) Calcul Littéral, N. 99.
(*b*) Ibid. N. 104.

Donc AB. DE : : BC. EF.

En un mot, AB & DE sont également inclinées dans des espaces paralleles différents, B C & EF le sont aussi par l'hypothèse.

Donc AB. DE : : BC. EF *. * N. 148.

Tirez des perpendiculaires des autres sommets, vous trouverez les mêmes proportions dans les autres côtés.

De-là, dans deux Triangles semblables, les côtés de l'un sont entre eux comme les côtés homologues de l'autre.

Je dis que AB. BC : : DE. EF.

AB. DE : : BC. EF * : donc en * N. 150.
raison alterne (*a*) AB. BC : : DE. EF.

PROPOSITION VI.

151. *La ligne* AB *qui divise en* Fig. 113.
deux également un angle CAD *d'un Triangle* ACD, *partage la base en*

(*a*) Calcul Littéral, N. 144.

deux parties qui ſont entre elles comme les côtés.

Prolongez DA en E, prenant AE = AC; puis tirez EC: & je dis que DB. BC :: DA. AC.

1°. Le Triangle EAC eſt iſocele, puiſque EA = AC.

2°. L'angle extérieur CAD vaut les intérieurs oppoſés ACE,
* N. AEC *, qui ſont égaux, puiſque
129. le Triangle eſt iſocele.

Donc l'angle CAB = ACE alterne; car l'angle CAB eſt moitié de CAD, par la conſtruction:
* N. donc EC & AB ſont paralleles *:
102. donc AB eſt une parallele qui coupe les côtés CD, DE du Trian-
* N. gle CED proportionnellement *:
149. donc DB. BC :: DA. AE = AC: donc DB. BC :: DA. AC.

152. De-là, ſi une ligne AB diviſe la baſe CD d'un Triangle proportionnellement aux côtés, elle partage en deux également l'angle oppoſé CAD.

Si DB. BC : : DA. AE = AC, je dis que l'angle BAC = BAD.

Les parties des côtés coupés étant proportionnelles, la coupante AB est parallele à la base EC *: donc l'angle BAC = ACE alterne = AEC *.

* N. 149.

* N. 151.

Ainsi, comme l'angle extérieur total CAD, qui comprend les angles BAC, BAD, vaut les intérieurs opposés égaux *, l'angle BAC = BAD.

* N. 129.

153. *EUDOXE. Je vois que vous allez couper une ligne* AB *en parties proportionnelles aux parties* CD, DE, *&c. d'une autre* CF.

Fig. 114.

ARISTE. Soient donc AB & CF paralleles, coupées par les obliques CAG, FBG, DHG, EIG.

1°. L'angle GAH = GCD, & l'angle GHA = GDC *. Donc les deux Triangles AGH, CGD sont semblables *.

* N. 104.

* N. 133.

2°. Par la même raison, les

Triangles HGI, DGE, &c. le sont.

Cela posé, je dis que AH. HI : : CD. DE, &c.

Dans les Triangles semblables, les côtés homologues, ou opposés aux mêmes angles, sont pro-
* N. portionnels * : donc AH. CD : :
150. HG. DG : : HI. DE.

* N. Donc AH. CD : : HI. DE * :
104. donc en raison alterne (*a*) AH. HI : : CD. DE.

154. EUDOXE. *Je vous donne*
Fig. *deux lignes* BC, CD : *il faut leur*
115. *trouver une troisième proportionnelle.*

ARISTE. 1°. Je fais des lignes données une ligne droite BCD.

2°. Je prens BE = CD, pour en faire avec BC un angle quelconque EBC.

3°. De E j'abaisse une ligne droite EC sur C; & de D, j'éleve une parallele.

(*a*) Calcul Littéral, N. 144.

4°. Je prolonge BE jusqu'à la parallele DF; & je dis que le prolongement EF est la troisième proportionnelle, ou que BC. CD :: CD. EF.

BC. CD :: BE. EF *: or CD = BE, par la construction. * N. 149.

Donc BC. CD :: CD. EF, ou ÷ BC. CD. EF * * N. 110.

155. EUDOXE. *Enfin, je vous donne trois lignes* AB, AC, BD: *il faut trouver la quatrième proportionnelle.* Fig. 116.

ARISTE. 1°. De la première AB & de la seconde AC, je fais un angle BAC.

2°. Joignant la troisième BD à la première AB, j'en fais une ligne droite ABD.

3°. Du point de jonction B, je tire une ligne droite en C, & du point D, j'éleve une parallele à BC.

Enfin, je prolonge AC jusqu'à la parallele; & je dis que le pro-

longement CE est la quatrième proportionnelle.

* N. 149. AB. BD :: AC . CE*: donc AB. AC :: BD. CE (a).

EUDOXE. D'autres Propositions donneront d'autres Problêmes.

PROPOSITION VII.

Fig. 117. 156. *ARISTE. Si de l'angle droit* ABC *d'un Triangle rectangle* ACB, *on abaisse une perpendiculaire* BD *sur la base ; elle divisera le Triangle en deux autres semblables au premier.*

Je dis que les Triangles ACB, BDC, BDA sont semblables.

1°. Ils ont un angle droit, chacun, ABC par l'hypothèse, & ADB, CDB, formés par la perpendiculaire BD *. *N. 95.

2°. Les deux Triangles ACB & BDC ont l'angle C commun : donc ils ont les trois angles égaux*. * N. 133.

3°. Les Triangles ACB & BDA

(a) Calcul Littéral, N. 144.

BDA ont l'angle A commun : donc ils ont aussi les trois angles égaux.

Donc les trois Triangles ayant les angles égaux, sont semblables *. * N. 130.

PROPOSITION VIII.

157. *La perpendiculaire abaissée du sommet d'un Triangle rectangle sur l'hypotenuse* AC, *est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypotenuse.*

Je dis que ÷ AD. DB. DC.

Les trois Triangles formés d'un seul par la perpendiculaire étant semblables *, leurs côtés homologues ou de même nom, sont proportionnels *: donc le moyen côté AD du Triangle BDA est au plus petit BD, comme le moyen côté BD du Triangle BDC est au plus petit DC : donc ÷ AD. DB. DC. * N. 156. * N. 150.

158. EUDOXE. *J'attens une moyenne proportionnelle entre deux*

Fig. 118. *lignes données* EF, FG.

ARISTE. 1°. Les joignant par leur extrémité F, j'en fais une ligne droite EG.

2°. Du milieu H de la droite EG, je décris un demi-cercle.

3°. Du point commun F, j'éleve à la circonférence une perpendiculaire IF.

Enfin je forme l'angle EIG; & je dis que IF est la moyenne proportionnelle, ou que ÷ EF. IF. FG.

L'angle EIG appuyé sur le diamétre est droit *.

* N. 115. Et IF est une perpendiculaire, qui aboutit au sommet de l'angle droit, par la construction : donc ÷ EF. IF. FG *.

* N. 157. Encore quelques Propositions.

PROPOSITION IX.

Fig. 119. 159. *Si deux Triangles* ABC, EDF, *ont leurs côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Soient AC. AB :: DF. DE ; AB. BC :: DE. EF ; BC. CA :: EF. FD.

Je dis que les Triangles ABC, EDF sont semblables.

1°. Faites sur AB l'angle BAG = D, & l'angle ABG = E : les deux Triangles EDF, GAB sont semblables *, ayant les angles égaux. * N. 133.

2°. Par l'hypothèse & à cause de ces Triangles semblables, AC. AB :: DF. DE :: AG. AB.

Donc deux raisons égales à une troisième étant égales entre elles, AC. AB :: AG. AB (a) : donc le côté AC = AG (b), puisque deux grandeurs qui ont même raison à une troisième sont égales.

Par le même principe, BC = BG.

D'ailleurs le troisième côté AB est commun.

(a) Calcul Littéral, N. 104.
(b) Ibid. N. 106.

Donc les deux Triangles ABC, GAB sont égaux, & par conséquent semblables *.

* N. 134. Or le Triangle GAB est semblable au Triangle EDF, par la construction ; donc les Triangles ABC, EDF sont semblables.

PROPOSITION X.

Fig. 119. *160. Deux Triangles sont semblables, dès qu'ils ont un angle égal & les côtés qui le comprennent, proportionnels.*

Soient l'angle BAC = D, & les côtés AB, AC, & DE, DF, proportionnels.

Faites l'angle BAG = D, le Triangle BAG semblable au Triangle EDF : & je dis que les Triangles ABC, EDF sont semblables.

1°. Par l'hypothèse, AC, AB :: DF. DE :: AG. AB : donc AC.

AB : : AG. AB (*a*) : donc AC = AG (*b*).

2°. L'angle BAC = D = BAG par la construction : donc l'angle BAC = BAG.

Ainsi les deux Triangles ABC & ABG ont deux côtés égaux AC, AG, un côté commun AB, & un angle égal compris entre deux côtés égaux : donc ils sont égaux *, & par conséquent semblables *. * N. 136. * N. 134.

Mais les Triangles ABG & EDF sont semblables par la construction : donc les Triangles ABC & EDF le sont.

PROPOSITION XI.

Fig. 120.

161. *Si d'un point A hors du cercle, on mene au cercle une Tangente & une Sécante, la Tangente est moyenne proportionnelle entre la Sé-*

(*a*) Calcul Littéral, N. 104.
(*b*) Ibid. N. 106

cante entiere & sa partie extérieure au cercle.

Soient AB, Tangente; AC, Sécante; AD sa partie extérieure: tirez BC, BD: je dis que ÷ AC. AB. AD.

1°. Les deux Triangles ABC, ADB ont l'angle A commun.

2°. L'angle inscrit BCD & l'angle du petit segment ABD sont égaux, ayant pour mesure, chacun, la moitié de l'arc BD *.

* N. 112 & 114.

Donc l'angle ABC = ADB: donc les deux Triangles ABC, ADB étant semblables *, leurs côtés homologues sont proportionnels; or le côté AC du grand Triangle & le côté AB du petit, le côté AB du grand & le côté AD du petit sont homologues, ou opposés aux mêmes angles: donc ÷ AC. AB. AD.

* N. 130.

De-là, 1°. Si l'on tire une autre Tangente AG de l'autre côté de la Sécante AC, AG sera égale

moyenne proportionnelle, par la même raison.

2°. Les Tangentes AB & AG tirées du même point, étant également moyennes proportionnelles, elles ont même raison à la même grandeur AD, & par conséquent elles sont égales *. * N. 106.

3°. Le quarré de la Tangente AB est égal au rectangle fait de la Sécante AC par sa partie extérieure AD (*a*), puisque dans une proportion continue, le quarré du moyen est égal au produit des extrêmes.

162. EUDOXE. *Et c'est apparemment à la lumière de la dernière Proposition, que vous divisez une ligne en moyenne & extrême raison, ou ensorte que la plus grande partie soit moyenne entre la toute & la plus petite partie.*

ARISTE. Oui : faut-il diviser la ligne AB ? Fig. 120.

(*a*) Calcul Littéral, N. 136.

1°. De B, j'éleve la perpendiculaire BE, moitié de AB.

2°. De E, intervalle EB, je décris un cercle dont le diamétre vaut AB, valant deux fois EB moitié de AB.

3°. Je tire la Sécante AC, & fais l'angle CBD.

4°. Sur AB, je prens AF = AD. AF est la plus grande partie appellée la *Médiane*; FB la plus petite; AB, la Toute.

Et je dis que AB est divisée au point F en moyenne & extrême raison, ou que ∸ AB. AF. FB.

* N. 161. AC. AB : : AB. AD *: donc AC — AB. AB : : AB — AD. AD*.

* N. 144. Or AC—AB = AD, par la construction, & AB—AF = FB:

Donc AD. AB : : FB. AD.

Mais AD = AF par la construction : donc AF. AB : : FB. AF.

Donc en raison inverse, AB. AF

AF : : AF. FB, ou ∻ AB. AF. FB *. * N. 145.

163. *Eudoxe. Cela va nous donner un Triangle isocele dont chacun des angles de la base soit double de l'angle du sommet.* Fig. 121.

Ariste. 1°. Je divise une ligne GH en moyenne & extrême raison *. * N. 162.

2°. Des points H & I, intervalle GI, mediane, je décris deux arcs qui se coupent en K.

3°. Je fais les côtés GK, HK, IK; & je dis que GHK est le Triangle isocele dont il s'agit.

Je dis donc que l'angle GHK, aussi-bien que GKH, est double de l'angle G, ou IGK.

1°. HK = IK = GI, par la construction: donc les deux Triangles IHK, GIK, ayant, chacun, deux côtés égaux, sont isoceles *. * N. 120.

2°. Par la construction, GH. GI : : GI. IH : donc GH. HK = GI : : HK. IH : donc les deux Trian-

gles IHK, GHK, ayant un angle commun KHI, & les côtés GH & HK, HK & IH, propor-
* N. 160. tionnels, font semblables*: donc le Triangle GHK est isocele aussi.

Or l'angle extérieur HIK = IGK + GKI, intérieurs opposés
* N. 129. d'un isocele*.

Donc l'angle GHK = HIK = IGK + GKI = IGK : donc l'angle GHK, aussi-bien que GKH = GHK est double de l'angle IGK = G.

164. De-là, *dans un Triangle*
Fig. 122. *isocele* GHK, *qui a le sommet au centre G d'un cercle, & pour base la mediane* HK = IG, *d'un de ses côtés, la base* HK *est corde de 36 dégrés.*

L'angle GHK, aussi-bien que GKH est double de l'angle G du
* N. 163. sommet*: donc les angles GHK, GKH, sont de 72 dégrés, chacun, & l'angle G de 36: car 1°. 72 est double de 36, & deux fois

72 + 36 font 180, valeur du Triangle.

2°. Tout autre nombre double que 72, pris deux fois, avec tout autre soudouble, que 36, n'égaleroit pas 180.

Or l'angle G du sommet étant de 36 dégrés, la corde HK l'est aussi, puisque les dégrés de l'arc, de l'angle, ou de la corde, sont les mêmes : donc la base HK est corde de 36 dégrés.

Ainsi, la mediane du rayon est corde de 36 dégrés.

Enfin, les Triangles amenent les Quadrilateres.

EUDOXE. Et ce que vous avez dit de ceux-là me fait souhaiter de vous voir déveloper vos idées sur ceux-ci.

ARISTE. Ce sera quand la complaisance ou la politesse vous ramenera ici.

VI. ENTRETIEN.

Sur les Quadrilatéres.

EUDOXE. NOus passons donc, Ariste, des figures de trois côtés à celles de quatre : rien de plus naturel ; c'est monter par une pente douce.

ARISTE. Aussi, Eudoxe, nous allons bien faire du chemin ; & n'ayant point de temps à perdre, commençons à l'ordinaire par quelques Définitions ; elles seront suivies de Propositions qui donneront les lumières nécessaires pour résoudre les Problêmes.

DÉFINITIONS.

165. Le Quadrilatere est donc une figure de quatre côtés ; tels sont le Trapeze, le Parallelograme, ou le Rhombe, le Rhom-

boïde, le Rèctangle, le Quarré.

166. Le Trapeze B a ses quatre côtés inégaux ; si le Quadrilatere a deux côtés égaux, les autres inégaux, c'est un Trapezoïde. Fig. 123.

167. Le Parallelogramme a ses côtés opposés égaux & paralleles.

168. Le Rhombe, ou la Lozange C a ses quatre côtés égaux, & ses angles opposés égaux, non droits, mais deux aigus, deux obtus. Fig. 124.

169. Le Rhomboïde D a précisément ses côtés opposés égaux, & ses angles opposés égaux, non droits, mais deux aigus, deux obtus. Fig. 125.

170. Le Rectangle E a ses côtés opposés égaux, & ses quatre angles droits. Le nom de Rectangle se donne spécialement au Quarré-long, quoiqu'il convienne au Quarré. Fig. 126.

Fig. 127. *171.* Le Quarré F a ses quatre côtés égaux, & ses quatre angles droits.

172. La Diagonale GH est une ligne droite tirée d'un angle à l'autre d'un Quadrilatere.

173. Un Quadrilatere est inscrit, quand il a tous ses angles dans la circonférence d'un cercle; & circonscrit si tous ses côtés la touchent: le cercle est circonscrit quand il passe par tous les angles d'une figure.

174. Le Quadrilatere se désigne par quatre lettres placées aux quatre angles, ou par deux, placées aux deux angles opposés.

Cela posé, parcourons les propriétés générales, puis les particuliéres.



Quadrilateres en général.

PROPOSITION I.

175. *Le Quadrilatere* DE *vaut quatre angles droits.* Fig. 128.

Il vaut deux Triangles, puisque la diagonale BC le partage en deux Triangles BCD, BCE : or deux Triangles valent quatre angles droits *. * N. 122.

PROPOSITION II.

176. *Les angles opposés* A, C, *du Quadrilatere inscrit* ABCD, *sont égaux à deux droits.* Fig. 129.

Les angles A, C, étant, pris ensemble, appuyés sur toute la circonférence, A, sur BCD, C, sur BAD ; ils ont pour mesure la demi-circonférence * : donc ils valent deux droits *. * N. 114. * N. 94.

C'est la valeur des deux autres angles B, D, par la même raison.

Parallelogrames en général.

PROPOSITION I.

Fig. 130. 177. *Si les côtes opposés* BC *&* DE, BD *&* CE, *d'un Quadrilatere, sont égaux, ils sont paralleles.*

Soit la diagonale BE partageant la figure en deux Triangles BEC, BED.

Puisque le côté BC = DE, & BD = CE, & que BE est commun, les deux Triangles sont égaux, & par conséquent équiangles* : donc les angles alternes correspondants, BED, CBE, ou BEC, DBE, sont égaux. Or les lignes qui avec l'oblique ou la diagonale BE font les angles alternes égaux, sont paralleles* : donc BC & DE, BD & CE sont paralleles.

* N. 134.

* N. 102.

PROPOSITION II.

Fig. 130. 178. *Dès que deux côtés opposés*

BC, DE *d'un Quadrilatere sont égaux & paralleles, les autres* BD, CE, *le sont.*

Les angles alternes BED, CBE, étant égaux *, & les côtés qui les comprennent, égaux, les Triangles BCE, BDE, le sont *: donc 1°. Les côtés correspondants BD, CE, sont égaux. 2°. Les angles alternes BEC, DBE étant égaux, les côtés BD & CE qui font ces angles avec l'oblique BE, sont paralleles *.

* N. 101.

* N. 136.

* N. 102.

PROPOSITION III.

179. *Si les côtés opposés d'un Quadrilatere sont égaux, c'est un Parallelograme.*

Ces côtés égaux sont paralleles *: donc, c'est un Parallelograme *.

* N. 177.

PROPOSITION IV.

180. *Les angles opposés d'un Parallelograme sont égaux.* Fig. 131.

Je dis que l'angle A = B, & l'angle C = D.

L'angle A avec D vaut deux droits, aussi-bien que l'angle B
* N. 103. avec D *, puisque si une oblique coupe deux paralleles, les angles internes de même côté valent 2
* N. 8. droits : donc l'angle A = B * : car les grandeurs, qui jointes séparément avec la même, font même grandeur, sont égales.

Par la même raison, l'angle C = D.

PROPOSITION V.

Fig. 132. 181. *La Diagonale* AE *partage le Parallelograme en deux Triangles égaux.*

Je dis que le Triangle ABE = ADE.

* N. 167. AB = DE, & AD = BE *, AE est commun : donc le Triangle ABE a ses trois côtés égaux à ceux du Triangle ADE : donc le
* N. 134. Triangle ABE = ADE *.

PROPOSITION VI.

182. *Les Parallelogrames entre mêmes paralleles & sur même base sont égaux.* Fig. 133.

Soient le Rectangle AC & le Rhomboïde CE entre les paralleles AF, BH, & sur la base BC : je dis que AC = CE.

1°. AB = DC, BE = CF, AD = EF * par la définition. * N. 167.

2°. Aux côtés égaux AD & EF, ajoutez DE : AE = DF *.

Donc les deux Triangles BAE, CDF, ayant côtés égaux, sont égaux * : retranchez-en la grandeur commune DEG : les restes ou les Trapezes ABGD & CGEF sont égaux *. * N. 134. * N. 10.

Enfin, aux restes égaux, ajoutez la grandeur commune BGC : vous avez AC = CE.

183. De-là, 1°. La hauteur du Parallelograme est une perpendi-

culaire FH abaiſſée du ſommet ſur la baſe prolongée.

184. 2°. Les Parallelogrames AC, CE, qui ont même baſe & même hauteur perpendiculaire FH = DC, ſont égaux, étant compris entre mêmes paralleles ſur même baſe.

185. 3°. Pour meſurer un Parallelograme CE; il ſuffit d'avoir égard à ſa baſe BC & à la perpendiculaire FH qui meſure ſa hauteur: car la baſe BC multipliée par la perpendiculaire FH, donne un rectangle AC égal à un Parallelograme quelconque CE de même baſe & de même hauteur *.

* N. 184.

186. Ainſi, un Parallelograme eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur, ou de ſa hauteur par ſa baſe; & les Parallelogrames de même baſe, ſont comme leurs hauteurs, ou au contraire, les produits par même multiplicateur

étant comme les grandeurs multipliées (*a*).

EUDOXE. *Je vous donne la valeur d'un Parallelograme & un de ses côtés : comment trouvez-vous l'autre ?*

ARISTE. Je divise la valeur donnée du Parallelograme par le côté connu ; & le quotient est l'autre côté : car cet autre côté est celui, qui multiplié par le côté connu, fait le Parallelograme * : or le Quotient multiplié par le côté qui est le diviseur, forme le Parallelograme, puisque le produit du quotient par le diviseur est égal au dividende (*b*).

* N. 185.

PROPOSITION. VII.

187. *Les Parallelogrames sont doubles des Triangles de même base & de même hauteur.* Fig. 134.

Les Parallelogrames AD, BF, & le Triangle BED ont même

(*a*) Cal. Lit. N. 147. (*b*) Cal. num. n. 30.

base BD & même hauteur FG
= CD, comprise entre mêmes
* N. paralleles *.
183. Or, 1°. Le Parallelograme BF
* N. est double du Triangle BED *,
181. puisque la diagonale ED coupe
le Parallelograme en deux Triangles égaux.

2°. Le Parallelograme AD =
* N. BF * est double aussi du Triangle
182. BED.

Donc les Parallelogrames, &c.

188. De-là, 1°. La hauteur du
Triangle est une perpendiculaire
* N. abaissée du sommet sur la base *,
183. & les Triangles de même base,
ainsi que les Parallelogrames, sont
comme leurs hauteurs, ou au
* N. 186. contraire *, puisque les moitiés
* N. 11. sont comme les tours *; & par
conséquent les Triangles comme
les Parallelogrames, de même base & de même hauteur, sont
égaux.

189. 2°. Multipliez la base

l'un Triangle par sa hauteur ; vous avez un Parallelograme dont la moitié sera la valeur du Triangle ; ou bien multipliez la base par la moitié de la hauteur, ou enfin la hauteur par la moitié de la base : & le produit qui sera la moitié du Parallelograme, sera la valeur du Triangle.

190. 3°. Un Triangle en vaut plusieurs de même hauteur dont les bases, prises ensemble, valent la sienne.

Je dis que le Triangle ABC = BDE + EFG + GHC. Fig. 135.

Les trois Triangles BDE, EFG, GHC font la moitié du Parallelograme BH, puisque chacun est la moitié de l'un des trois petits Parallelogrames qui font le grand BH *: or le Triangle ABC est la moitié du Parallelograme BH : donc le Triangle ABC = BDE + EFG + GHC.

* N. 187.

EUDOXE. Il s'agit de partager

un champ triangulaire en deux parties égales.

Fig. 136. *ARISTE.* Soit le plan triangulaire BCD ; après avoir décrit par le sommet C une ligne FG parallele à la base BD, tirez une ligne CE sur le milieu E de la base : les deux Triangles BCE, DCE seront les deux parties égales *, ayant même base, puisque BE = ED par la construction, & même hauteur, puisqu'ils sont entre mêmes paralleles.

* N. 188.

Et voilà le plan mesuré.

PROPOSITION VIII.

Fig. 137. 191. *Si l'on tire deux lignes* BF, CE *paralleles aux côtés* GH, AH *d'un Parallelograme par un point* D *de la diagonale* IH ; *elle partagera le Parallelograme en quatre, dont deux que la diagonale ne traversera pas, seront égaux.*

Je dis que le Parallelograme AD = DG.

Le

Les Triangles HIA = HIG, HDB = HDE, DIC = DIF *, * N. 181.
puisque la diagonale divise en deux Triangles égaux chaque Parallelograme qu'elle coupe.

Donc, puisque AD & DG joints à grandeurs égales, font grandeurs égales AD = DG *. * N. 8.

192. *EUDOXE. Soient le Triangle* ABC *& l'angle* D : *il faut faire* Fig. 138.
un Parallelograme égal au Triangle donné ABC, *& qui ait un angle égal à l'angle donné* D.

ARISTE. Hé bien, 1°. Par le sommet A du Triangle ABC, je tire une parallele AE à la base BC.

2°. Sur le milieu F de la base, j'éleve une ligne FH, faisant avec la moitié FC de la base un angle CFH, égal à l'angle donné D *. * N. 108.

3°. De C, je mene une parallele à FH.

Enfin du sommet A, j'abaisse une ligne AF sur le milieu de la base, & je dis que CEHF est le

Parallelograme en queſtion.

1°. CEHF eſt double du Triangle ACF *, ayant même baſe & même hauteur, compriſe entre mêmes paralleles; & le Triangle ABF = ACF de même hauteur & de même baſe, par la conſtruction *:

* N. 187.

* N. 188.

Donc CEHF eſt égal au Triangle ABC.

2°. L'angle CFH = D, par la conſtruction.

Donc CEHF eſt le Parallelograme qu'il falloit faire.

Fig. 139. *EUDOXE. Mais on vous donne une ligne A, un Triangle B, un angle C: il s'agit de faire ſur cette ligne un Parallelograme qui ſoit égal au Triangle B, & qui ait un angle égal à l'angle C.*

ARISTE. 1°. Je fais un Parallelograme EF égal au Triangle B ayant un angle F égal à l'angle donné C *.

* N. 192.

2°. Je prolonge FG & DE fai-

ſant GH = A = EI jointe par IH.

3°. Je tire la diagonale IK, puis FK, KL + LM jointe par MH.

DM eſt un Parallelograme partagé en pluſieurs.

Et je dis que GM eſt celui que l'on demande.

1°. Le Parallelograme GM = EF = B*, n'étant pas traverſé par la diagonale IK. * N. 191.

2°. GM eſt fait ſur GH = A* par la conſtruction. * N. 104.

3°. L'angle GLM = EGH = DFG = C, par la conſtruction.

Donc GM eſt le Parallelograme en queſtion.

193. Enfin les Parallelogrames ſemblables ſont ceux qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun, & leurs côtés homologues, ou faiſant mêmes angles, proportionnels.

Cela poſé;

PROPOSITION IX.

Fig. 140. 194. *La raiſon de deux Parallelogrames A, B, eſt une raiſon compoſée de celles de la baſe à la baſe & de la hauteur à la hauteur.*

Soient c, d, les baſes ; e, f les hauteurs ; $c.d$ & $e.f$ ou $\frac{c}{d}$ & $\frac{e}{f}$, ſont les raiſons de la baſe à la baſe, & de la hauteur à la hauteur.

Multipliez les antécédens c, e, l'un par l'autre, & les conſéquens d, f, de même : vous avez dans les produits les deux rectangles A, B *.

* N. 186.

Or la raiſon du produit des antécédens & du produit des conſéquens de deux raiſons eſt une raiſon compoſée de ces deux raiſons (*a*) : donc la raiſon de deux Parallelogrames eſt une raiſon compoſée de celles de la baſe à la

(*a*) Calcul Littéral, N. 177.

base, & de la hauteur à la hauteur (*a*).

PROPOSITION X.

195. *La raison des Parallelogrames semblables est doublée de celles de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.*

Dans ces Parallelogrames, les hauteurs sont comme les bases*. * N. 193.

Donc la raison de ces Parallelogrames est composée de raisons égales *: donc c'est une raison doublée (*b*). * N. 194.

196. De-là, 1°. Les Parallelogrames semblables sont comme les quarrés des exposans de leurs côtés homologues, la raison doublée ayant pour exposans des nombres quarrés (*c*).

(*a*) Aussi, soient a & b les bases; c & d les hauteurs; A & B les Parallelogrames : donc $ac = A$, & $bd = B$. Or $\frac{ac}{bd}$ est la raison composée de $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

(*b*) Calcul Littéral, N. 170.

(*c*) Ibid. N. 189.

Fig. 140. Par exemple, si $c . d :: e . f$, que c soit moitié de d & e, moitié de f; les exposans seront 1. 2 :: 1. 2; & la raison doublée 1. 4, ou $\frac{1}{4}$, est exprimée en nombres quarrés.

Ainsi, les Parallelogrames semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues ou correspondants.

197. 2°. Les Triangles semblables qui sont moitié de Parallelogrames semblables *, sont en raison doublée de leurs côtés homologues, & par conséquent comme les quarrés de ces côtés, les moitiés étant comme les touts *.

* N. 187.

* N. 11.

Venons aux Rectangles.

Les Rectangles en particulier.

PROPOSITION I.

198. *Deux Rectangles semblables sont entre eux comme les quarrés des exposans de leurs côtés homologues.*

Ce sont des Parallelogrames
semblables* : donc ils sont entr'eux * N.
comme les quarrés des exposans 165.
de leurs côtés homologues*. * N.

Eudoxe. Vous allez détermi- 196.
ner le rapport de deux rectangles
semblables A, B.

Ariste. Le quarré des antécédens & le quarré des conséquens des exposans expriment ce rapport*.

Si la base est moitié de la base ; * N.
& la hauteur, de la hauteur ; les 197.
exposans seront 1. 2 :: 1. 2. je multiplierai 1 par 1, 2 par 2, les produits seront les quarrés 1. 4 & je dirai A. B :: 1. 4, ou B = 4A.

199. Maintenant deux rectangles sont figures reciproques quand la longueur du premier est à celle du second, comme la hauteur du second à celle du premier.

Cela posé ;

PROPOSITION II.

Fig. 141. *Deux rectangles* A, B, *réciproques sont égaux.*

Soit a, la longueur du premier; b, sa hauteur; c, la longueur du second, d sa hauteur: donc ab = A, & cd = B*.

* N. 186.

Et je dis que $ab = cd$.

Par l'hypothèse, $a . c :: d . b$: donc le produit des extrêmes étant égal au produit des moyens (a), $ab = cd$.

Si $a = 4$, $b = 2$, $c = 2$, & $d = 4$; le premier rectangle sera $4 \times 2 = 8$, & le second sera $2 \times 4 = 8$.

PROPOSITION III.

200. *Enfin, dans un Quadrilatere inscrit, le rectangle fait des deux diagonales multipliées l'une par l'autre, vaut la somme des deux rectangles des côtés opposés.* Fig. 142.

(a) Calcul Littéral, N. 136.

Je

dis que AB × CD = AC
D + BC × AD.

oit AE faiſant l'angle DAE
AC.

. L'angle inſcrit ACE =
D ſur même arc *, & l'angle * N. 115.
E = BAD formé de l'angle
E = BAC & de l'angle BAE
FAE commun. Donc les
angles ACE & ABD ſont ſem-
bles * : donc AC. CE : : AB. * N. 133.
* : donc AB × CE = AC × * N. 150.
*.

°. L'angle inſcrit ABC = * N. 135.
DE = ADC ſur même arc * & * N. 115.
C = DAE, par la conſtruction :
nc les Triangles ACB, AED
nt ſemblables * : donc BC. AB * N. 133.
ED. AD : donc AB × ED =
C × AD *. * N. 135.

Donc AB × CE + ED, ou
AB × CD = AC × BD + BC ×
AD.

Reſerverons-nous les Quarrés
pour le premier Entretien ?

EUDOXE. Ils suffisent pour en faire la matiére.

VII. ENTRETIEN.

Sur les Quarrés en particulier.

201. *EUDOXE*. VOus me revoyez, Ariste, plutôt apparemment que vous ne le pensiez.

ARISTE. Et c'est encore trop tard.

EUDOXE. Peut-être faisiez-vous là quelques réfléxions sur les figures quarrées.

ARISTE. Justement; je disois :
Fig. 143. une ligne droite AC parcourant perpendiculairement une ligne égale AB décrit un quarré AD.

Car 1°. Les côtés AC & BD sont paralleles étant perpendicu-
*N.44. laires sur AB * ; AB, CD sont paralleles de même, puisque leur

distance est mesurée par deux perpendiculaires égales AC, BD *. *N.40.

2°. Les quatre angles A, B, C, D, sont droits * : car AC, BD *N.95. perpendiculaires sur AB, le sont sur CD parallele à AB *. *N.46.

3°. Les quatre côtés sont égaux, AB = AC = BD, par la construction ; & CD = AB *, puisque ce sont deux perpendiculaires entre mêmes paralleles. *N.40.

Donc AD est un quarré *. *N. 171.

202. Ainsi, une perpendiculaire multipliée par elle-même, ou par une ligne égale, donne un quarré, & la figure quarrée est le produit d'une ligne multipliée par elle-même.

203. *EUDOXE. Je vois assez comment vous décririez un quarré sur une ligne donnée* AB.

ARISTE. 1°. J'éleverois sur A la perpendiculaire AC = AB *. *N. 115.

2°. Faisant couler AC perpendiculairement sur AB d'un bout à

* N. l'autre, j'aurois le quarré AD *.
201. Cela supposé ; commençons par la célébre Proposition de Pytagore.

PROPOSITION I.

Fig. 144. 204. *Dans le Triangle rectangle le quarré de l'hypoténuse est égal aux quarrés des deux autres côtés.*

Soient ABC Triangle rectangle; AE, quarré de l'hypoténuse AC; AI & CF, quarrés des côtés AB & BC; BKL partageant le quarré AE en deux rectangles AL, KE; BD & BE, CH & AG obliques.

Je dis que le quarré AE = AI + CF.

1°. Le côté AH = AB côté
* N. du même quarré *, AC = AD,
171. & l'angle HAC = BAD, puisqu'ils sont faits chacun, d'un angle droit HAB ou DAC, & d'un angle commun BAC : donc les deux Triangles ACH, ABD, ayant deux côtés égaux à deux cô-

rés, & les angles compris, égaux, sont égaux *. * N. 136.

Or le Triangle ACH est moitié du quarré AI *: car il a même base AH & même hauteur perpendiculaire AB, puisqu'il est contenu entre mêmes paralleles HA & IB prolongée en C. * N. 187.

Le Triangle ABD est aussi moitié du rectangle AL, ayant même base AD & même hauteur AK comprise entre les paralleles AD & LK + KB.

Donc la moitié du rectangle AL vaut la moitié du quarré AI: donc AL = AI *. *N. 11.

2°. Par la même raison, le rectangle KE vaut le quarré CF.

Donc le quarré entier AE = AI + CF.

EUDOXE. La Proposition se démontre encore autrement, ce semble.

ARISTE. Je vous écoute à mon tour.

Fig. 145. *EUDOXE*. Soit le Triangle rectangle ABC, réduit par la perpendiculaire BD en trois Triangles semblables *, dont les côtés homologues sont proportionnels *.

* N. 156.

* N. 150.

Je dis que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (*a*).

* N. 150. ∺ AC. AB. AD * : donc $AC \times AD = AB^2$ (*b*).

De même ∺ AC. BC. DC : donc $AC \times DC = BC^2$:

Or $AC \times AD + AC \times DC$, ou $AC \times \overline{AD + DC} = AC^2$.

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

ARISTE. La Démonstration est plus précise. Venons à l'inverse de la Proposition.

PROPOSITION II.

Fig. 146. 205. *Si le quarré de l'un des côtés d'un Triangle* ABC *est égal aux*

(*a*) Calcul Littéral, N. 21.
(*b*) Ibid. N. 136.

quarrés des deux autres côtés, l'angle compris entre ces deux autres côtés est droit.

Soient BD = AB, & perpendiculaire sur le point B de BC, faisant l'angle droit CBD; $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Tirez l'hypoténuse CD.

Je dis que l'angle ABC est droit.

$CD^2 = BC^2 + BD^2 = AB^2$ *: * N. 204.

Or $AC^2 = BC^2 + AB^2 = BD^2$:

Donc $AC^2 = CD^2$.

Donc AC = CD (*a*), les racines étant égales, quand les puissances le sont.

Donc, les deux Triangles ayant les côtés égaux sont semblables *. * N. 134.

Donc puisque l'angle CBD est droit par la construction, l'angle correspondant ABC l'est.

(*a*) Calcul Littéral, N. 186.

Fig. 147. 206. *EUDOXE. Si l'on vous demande un quarré égal à deux quarrés donnés....*

*A*RISTE. Soient AB, BC, côtés des deux quarrés donnés.

1°. Je fais de ces côtés un angle droit ABC*.

* N. 115. 2°. Je lui tire une base AC; & je dis que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

AC est l'hypoténuse, & AB, BC sont les côtés d'un Triangle rectangle ABE*: donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$*.

* N. 120.

* N. 204.

Fig. 148. 207. *EUDOXE. Mais s'il faut un quarré égal à trois....*

*A*RISTE. Soient AD, AB, BC, côtés des trois.

1°. Ayant fait de AB, BC, un angle droit, je tire la base AC.

2°. Ayant fait de AC, AD un angle droit, je mene la base CD.

Et je dis que $CD^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2$.

* N. 204. $CD^2 = AC^2 + AD^2$*: or $AC^2 = AB^2 + BC^2$*, donc $CD^2 =$

* N. 206.

$AD^2 + AB^2 + BC^2$: on trouvera de même un quarré égal à quatre.

PROPOSITION III.

208. *Dans un Triangle obtusangle, le quarré de la base, a, de l'angle obtus, vaut les quarrés des autres côtés b, c, plus deux fois le plan du côté, c, par le prolongement, d, de ce côté depuis le sommet de l'angle obtus jusqu'à la perpendiculaire, e, tirée de l'angle* F *opposé à ce côté c.* Fig. 149.

L'angle G étant droit *, les * Triangles *bde*, *ac+d* & *e*, sont rectangles en G *. N. 95. * N. 120.

Cela posé; je dis que $a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$.

1°. $e^2 = b^2 - d^2$, puisque $b^2 = d^2 + e^2$ *. * N.

2°. $\overline{c+d} \times \overline{c+d} = c^2 + 2cd + d^2$ (a). 204.

Or $a^2 = e^2 + \overline{c+d} \times \overline{c+a}$ *. * N. 204.

Donc $a^2 = b^2 - d^2 + c^2 + 2cd + d^2$.

(a) Calcul Littéral, N. 35.

Mais $-d^2+d^2=0$ (a).

Donc $a^2=b^2+c^2+2cd$.

Maintenant pour parvenir à une certaine Propoſition qui s'offre à mon eſprit, j'en fais une autre.

PROPOSITION IV.

269. *Si deux Triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, & que l'angle compris entre les deux côtés du premier ſoit ſupplement de l'angle compris entre les deux côtés du ſecond, les deux Triangles ſont égaux.*

Fig. 150. Si AB = DC, & BE = DF; que l'angle CDF ſoit ſupplement de l'angle ABE, ou que l'angle CDF avec ABE faſſe la valeur de deux droits; je dis que le Triangle AEB = DFC.

Soit AB prolongée en G; BG = DC = AB, HI, parallele à AG.

(a) Calcul Littéral, N. 4.

1°. L'angle EBG est supplement de ABE * par la construction, comme l'angle FDC l'est par l'hypothèse : donc l'angle EBG = FDC. *N.97.

2°. BG = DC par la construction, & BE = FD, par l'hypothèse.

Donc le Triangle BEG = DFC *, puisque deux Triangles sont égaux dès qu'ils ont un angle égal, & les côtés qui le comprennent, égaux. *N. 136.

Or le Triangle AEB = BEG sur base égale & entre mêmes paralleles *. *N. 188.

Donc le Triangle AEB = DFC.

Cela supposé ;

PROPOSITION V.

210. *Si l'on fait trois quarrés* AG, BH, BI *sur les trois côtés d'un Triangle* ABC, *& qu'on joigne les côtés opposés à ceux de ce Triangle ; il se forme trois Triangles, égaux, chacun, au Triangle.* Fig. 151.

Je dis d'abord que le Triangle BDE = BAC.

1°. Les deux côtés BD, BE sont égaux aux deux côtés BA, BC, par la construction.

2°. Les quatre angles dont le cercle B est mesure, valent qua-
*N.94. tre droits *; & les deux angles
* N. ABD, CBE sont deux droits *.
171. Ainsi les deux angles DBE, ABC valent deux droits : donc l'angle ABC est supplement de DBE compris entre deux côtés égaux :

Donc le Triangle BDE =
* N. BAC*.
209. Par la même raison, les deux autres Triangles AIF, GCH, sont égaux, chacun, au Triangle ABC.

Fig. 211. De-là, si sur les quatre
112. côtés d'un trapeze AC, on fait quatre quarrés, & qu'on les joigne; il se forme quatre Triangles qui, pris ensemble, valent le double du trapeze.

Car 1°. Le Triangle ECF = BDC, & le Triangle HAG = BDA * : donc les deux Triangles ECF, HAG valent le Trapeze. * N. 210.

2°. Par la même raison, les deux autres Triangles IBK, LDM, ont la même valeur.

Donc si sur les quatre côtés, &c.

PROPOSITION VI.

212. *Les quarrés sont en raison doublée de leurs côtés, ou comme les quarrés des exposans de leurs côtés.*

EUDOXE. Ce sont rectangles semblables, puisqu'ils ont tous leurs angles droits, & leurs côtés proportionnels : donc, &c. * * N. 198.

Mais la diagonale du quarré....

PROPOSITION VII.

213. *ARISTE. La diagonale* BC *du quarré* DE *est incommensurable à son côté* BD (*a*). Fig. 153.

(*a*) Calcul Littéral, N. 96.

Si BC & BD étoient commensurables, ou s'ils avoient une commune mesure, la raison de BC à BD seroit une raison de nombre à nombre (*a*), puisqu'une partie de BC, prise un certain nombre de fois, mesureroit exactement BC & BD, comme l'unité mesure deux nombres :

Or la raison de BC à BD n'*est* pas une raison de nombre à nombre : si elle l'étoit, toute raison doublée de cette raison auroit pour exposans des nombres quarrés (*b*) ; ce qui n'est pas : car *la* raison du quarré de BC au quarré de BD est doublée de celle de
* N. 208. BC à BD *, les quarrés étant en raison doublée de leurs côtés : or la raison des quarrés de BC & de BD n'a pas pour exposans des nombres quarrés : car le côté BD
* N. 171. = DC * : donc le quarré de BC,

(*a*) Calcul Littéral, N. 189.
(*b*) Ibid. N. 189.

qui vaut les deux quarrés égaux de BD & de DC *, est double du quarré de BD. Ainsi, les exposans de la raison des quarrés de BC & de BD sont 2, 1.

* N. 200.

Mais 2, 1, ne sont pas nombres quarrés : 1 l'est ; 2 ne l'est pas (*a*) : point de nombre qui multiplié par lui-même donne 2.

Donc la raison de BC à BD n'est pas de nombre à nombre : donc BC & BD sont incommensurables.

Cependant le quarré de la diagonale BC & le quarré du côté BD sont commensurables, puisque ces quarrés sont comme nombre à nombre, ou comme 2 à 1 *.

* N. 204.

De-là, la diagonale & le côté du quarré sont incommensurables en eux-mêmes, & commensurables en puissances.

(*a*) Calcul numérique, N. 24.

PROPOSITION VIII.

Fig. 154. 214. *Chaque point de la diagonale AC d'un quarré BD est également éloigné des deux côtés AB, AD, de l'angle BAD d'où elle part.*

Je dis que la distance EG = EF.

* N. 120. 1°. Le Triangle isocele ACB = ACD *: donc l'angle EAG = EAF *.

* N. 127. 2°. EG, EF, mesures des distances du point E, étant perpen-

*N.34 diculaires *, l'angle AGE =

*N.95. AFE droit *.

3°. Le côté AE = EA commun.

Donc les deux Triangles

* N. 136. AEG, AEF, sont égaux *: donc ils ont leurs côtés proportion-

* N. 150. nels *: ainsi, EG. EF : : EA. AE: or EA = AE: donc EG = EF.

PROP.

PROPOSITION IX.

215. *Un Parallelograme fait sur la diagonale d'un quarré, & ayant un angle commun avec le quarré, est un quarré.* Fig. 154.

Je dis que le Parallelograme FG fait de la sorte est un quarré.

1°. Dans un Parallelograme, les côtés opposés sont égaux & paralleles *; donc AG = EF, & AF = EG. * N. 167.

2°. Puisque EG est parallele à AF, perpendiculaire sur AG, l'angle EGA = GAF = FEG opposé *; & par la même raison, l'angle AFE = EGA. * N. 180.

Donc les quatre angles sont droits, étant tous égaux, & l'angle GAF, droit.

3°. Comme les Triangles ACB, ACD sont isoceles *, l'angle EAG = EAF; d'ailleurs l'angle droit AGE = AFE, & le côté AE ou EA est commun: ainsi les * N. 120.

deux Triangles AEG, AEF sont
* N. égaux & semblables * : donc AG.
233. * N. AF : : AE. EA * : or AE = EA :
250. donc AG = AF = EG = EF.

Donc & les angles & les côtés sont égaux : donc FG est un quarré.

PROPOSITION X.

Fig. 216. *Le quarré d'une ligne dou-*
255. *ble est quadruple.*

Je dis que AD, quarré de AB, double de AC, est quadruple de AG, quarré de AC, ou que AD = 4AG.

1°. CI & HF sont deux quar-
* N. rés sur la diagonale BE *.
215. 2°. Le quarré CI = AG, puisque le côté BC = AC, par l'hypothèse.

3°. Le quarré AG = HF, le côté GH étant commun.

Enfin, GD = AG ; car la diagonale BE fait les Parallelogra-
* N. mes qu'elle ne coupe pas, égaux *.
191.

Donc AD $=4$AG.

217. *EUDOXE*. En un mot, soit AC $= 1x$, & AB $= 2x$: $2x \times 2x = 4x^2$ (*a*); $1x \times 1x = 1x^2$: or $4x^2 . 1x^2 :: 4 . 1$.

Mais s'il faut inscrire le quarré dans un cercle .....

ARISTE. Ayant tiré par le centre E deux diamétres perpendiculaires l'un sur l'autre, je mene par leurs extrémités A, C, B, D, des lignes droites; & la figure ACBD est le quarré inscrit. Fig. 156.

Car 1°. Chaque point de la perpendiculaire CD qui passe par le centre E, étant également éloigné des extrémités opposées A, B du diamétre qu'elle coupe*, les quatre côtés AC, CB, BD, DA sont égaux. *N. 23.

2°. Tous les angles de la figure ACBD sont droits, puisqu'ils sont appuyés chacun sur la demi-circonférence*. * N. 115.

(*a*) Calcul Littéral, N. 36.

Donc ACBD eſt le quarré inſ-
* N. crit *.

173. 218. De-là, *pour circonſcrire*
Fig. *un cercle au quarré* ACBD:
156. 1°. Tirez deux diagonales AB, CD: elles ſe couperont perpendiculairement par le milieu: car les deux extrémités A, B étant également éloignées des deux points oppoſés C, D, les lignes AB, CD ſeront perpendiculai-
*N.25. res *, & par conſéquent le point de ſection E également diſtant des
*N.30. points A, B, C, D *.

2°. Prenant pour rayon la moitié EB d'une diagonale, décrivez un cercle: paſſant par un angle, il paſſera par les quatre; & ce
* N. ſera le cercle circonſcrit *.

173. 219. EUDOXE. *Mais s'il faut*
Fig.
157. *inſcrire un cercle dans le quarré* EFGH.....

ARISTE. Un cercle appuyé ſur le milieu de chacun des côtés d'un quarré, eſt inſcrit:

Cela posé, 1°. Ayant coupé par le milieu chacun des côtés du quarré, je tire de deux points de section I, L, aux deux opposés K, M, deux perpendiculaires IK, LM qui se coupent en un point N, & qui sont paralleles aux côtés*. *N. 41.

2°. De ce point, prenant pour rayon la moitié NK d'une des perpendiculaires, je décris un cercle LIMK; & c'est le cercle inscrit.

Car 1°. Les moitiés FL, LE, EK, &c. des quatre côtés égaux, sont égales : 2°. Les perpendiculaires entre paralleles sont égales*. *N. 40.

Ainsi NI = MG; NM = KH; NK = MH; NL = KE; & par conséquent, NI = NM = NK = NL.

Donc le cercle passant par les extrémités I, M, K, L, est appuyé sur le milieu des quatre côtés : donc c'est le cercle qu'il falloit inscrire.

Fig. 156. 220. *EUDOXE. Maintenant c'est un quarré qu'il faut circonscrire au cercle* IMKL.

ARISTE. Par les extrémités I, M, K, L de deux diamétres perpendiculaires l'un sur l'autre, je tire quatre Tangentes FG, GH, HE, EF, & c'est le quarré.

Je dis donc que FH est un quarré circonscrit.

1°. FE & GH perpendiculaires sur LM sont paralleles, & par la même raison, FG & EH le sont *.

*N.44.

2°. FE = IK = GH entre mêmes paralleles *; par la même raison FG = LM = EH.

*N.40.

Or IK = LM, diamétres du même cercle *.

*N.18.

Donc le côté FE = GH = FG = EH.

3°. Puisque les quatre côtés sont perpendiculaires, les quatre angles F, G, H, E sont droits.

Donc FH est un quarré.

Enfin, ce quarré touche le cercle, puisqu'il est formé de quatre tangentes ; il le touche, dis-je, par le milieu de ses côtés : car les rayons de même cercle sont égaux *. & les perpendiculaires entre mêmes paralleles sont égales *.

*N.18.

*N.40.

Ainsi FL = IN = NK = LE ; par la même raison EK = KH, &c. Et si vous le voulez, Eudoxe, nous ferons une autre fois une sorte de mêlange des rectangles & des quarrés.

EUDOXE. Dès demain.



VIII. ENTRETIEN.

Sur les Rectangles & les Quarrés comparés ensemble.

ARISTE. VOus en ferez quitte, Eudoxe, pour quelques Propositions, mais qui demandent de l'attention.

EUDOXE. L'attention me coute peu quand il s'agit d'appercevoir des vérités que l'on ne sçauroit vous disputer.

ARISTE. Commençons :

PROPOSITION I.

Fig. 158. 221. *Si l'on coupe une ligne droite* AB *par le milieu* C, *& qu'on y ajoute une ligne droite* BD, *ensorte que les deux fassent une ligne droite* AD; *le rectangle* AI *fait de la toute* AD *& de l'ajoutée* BD, *avec le quarré de la moitié* CB *de la premiere*

miere AB *coupée par le milieu* C, *vaut le quarré fait de l'ajoutée* BD *&* *de la moitié* CB *de la premiere* AB.

Soient BG parallele à DE; IK + KL parallele à DC + CA; DF diagonale du quarré CE coupant les paralleles en H: donc BI & KG, parallelogrames sur la diagonale, sont deux quarrés*; & KG est quarré de KH ou de CB = KH comprise entre mêmes paralleles. Enfin HE & CH sont égaux n'étant pas coupé par la diagonale*; & CH = AK de même base & de même hauteur par la construction*: donc HE = AK.

* N. 215.
* N. 191.
* N. 186.

Cela posé; je dis que AI + KG = CE.

AI + KG = CI + KG + HE, ou AK = HE: or CI + KG + HE = CE:

Donc AI + KG = CE.

PROPOSITION II.

222. *Si l'on coupe une ligne* BC Fig. 159.

également en D, *& inégalement en* E; *le rectangle fait des parties inégales* BE, EC, *avec le quarré de la partie* DE *du milieu, vaut le quarré* DG *de la moitié* DC *de la ligne* BC.

Soient HM + MI parallele à BD + DC; NE parallele à LD; LC diagonale.

1°. MN, EI sont deux quar-
* N. rés *.
215. 2°. MN quarré de MF = DE, l'est de DE.

3°. BF est le rectangle de BE par EC = CI = EF.

Cela posé; je dis que BF + MN = DG.

1°. BM = DI, ayant même
* N. base & même hauteur *.
186. 2°, DF = FG *, puisque la dia-
* N.
191. gonale ne les traverse pas.

Donc BM + DF, ou BF = DI + FG:

Donc BF + MN = DI + FG + MN.

Or $DI + FG + MN = DG$:
Donc $BF + MN = DG$.

223. De-là, si l'on divise une ligne BC en parties égales, & en parties inégales, le rectangle des parties inégales BE, EC vaut le quarré de la moitié de la ligne divisée, moins le quarré du segment du milieu.

PROPOSITION III.

224. *Si l'on divise une ligne en deux, le quarré de la toute vaut les deux quarrés des deux parties, plus deux fois le rectangle d'une partie par l'autre.*

Divisons BC en deux au point D. Fig. 160.

Je dis que $BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2BD \times DC$.

Soit $BD = r$; & $DC = x$: donc $BC = r + x$: donc $BC^2 = r^2 + 2rx + x^2$, ou $r^2 + x^2 + 2rx$ (a).

(a) Calcul Littéral, N. 35.

Mais $r^2 = BD^2$, $x^2 = DC^2$; $2rx = 2BD \times DC$: donc $BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2BD \times DC$.

PROPOSITION IV.

225. *Enfin, si l'on divise une ligne en trois, le quarré de la toute vaut les trois quarrés des parties, plus deux fois le rectangle de la premiere par la seconde; plus deux fois le rectangle de la premiere par la troisième; plus deux fois le rectangle de la seconde par la troisième.*

Fig. 161. Divisons BC en trois aux points D, E.

Je dis que $BC^2 = BD^2 + DE^2 + EC^2 + 2BD \times DE + 2BD \times EC + 2DE \times EC$.

Soit $BD = r$

$DE = x$

$EC = y$.

Donc $BC = r + x + y$: donc $BC^2 = \overline{r + x + y} \times \overline{r + x + y}$.

Voyons quel est ce produit...

$$\overline{r+x+y} \times \overline{r+x+y} = \left\{ \begin{array}{l} r^2+rx+ry \\ rx+x^2+xy \\ ry+xy+y^2 \end{array} \right\} = r^2$$

$+x^2+y^2+2rx+2ry+2xy$ *. *N. 28.

Et $r^2 = BD^2$, $x^2 = DE^2$, $y^2 = EC^2$, $2rx = 2BD \times DE$, $2ry = 2BD \times EC$, $2xy = 2DE \times EC$.

Donc $BC^2 = BD^2 + DE^2 + EC^2 + 2BD \times DE + 2BD \times EC + 2DE \times EC$.

Eudoxe. Voyons votre opération . . . . elle est juste.

Ariste. Les Poligones seront la matiere d'un plus long entretien.

Eudoxe. Ils me dédommageront.

IX. ENTRETIEN.

Sur les Poligones.

Eudoxe. Il est question, ce me semble, de Poligones.

ARISTE. Oui.

EUDOXE. Le terme de Poligone est un peu équivoque; il pourroit convenir au Triangle, au Quadrilatere, dont nous avons parlé.

226. *ARISTE*. Il est vrai: mais je fixe la signification du terme en disant que j'entens par Poligone une figure plane de plus de quatre côtés.

227. La figure plane a-t-elle 5 côtés? C'est Pentagone; 6? Exagone; 7? Eptagone; 8? Octogone; 9? Ennéagone; 10? Décagone; 11? Ondécagone; 12? Dodécagone; 1000? Chiliogone, &c.

228. Et le Poligone est régulier, si tous ses côtés aussi-bien que ses angles, sont égaux.

229. Le Poligone régulier est inscrit dans un cercle lorsque tous les angles sont dans la circonférence; & circonscrit, quand tous les côtés la touchent.

230. Angle du Poligone inſcrit, ou circonſcrit, eſt un angle formé par deux de ſes côtés.

231. Périmetre eſt le circuit de la figure.

232. Apothéme, ou rayon droit AB eſt la perpendiculaire AB comprise entre le milieu B du côté DE d'un Poligone inſcrit, & le centre A du cercle. Fig. 162.

L'aire ou la ſurface d'un Poligone eſt l'eſpace terminé par ſes côtés.

233. Enfin deux Poligones ſont ſemblables quand leurs angles ſont égaux chacun à chacun, & les côtés, qui comprennent ces angles, proportionnels.

Eudoxe. Je prévois bien des Problêmes.

Ariste. Quelques Propoſitions nous aideront à les réſoudre.

Proposition I.

234. *Le Poligone peut ſe reduire* Fig. 163.

en autant de Triangles qu'il a de côtés.

Du point A pris à volonté dans le pentagone X, tirez cinq lignes droites aux cinq angles B, C, D, E, F, faits par les cinq côtés : voilà le Pentagone réduit en cinq Triangles. Six lignes tirées de même réduiroient l'Exagone en six Triangles, &c.

PROPOSITION II.

235. *Les angles du Poligone, pris ensemble, valent autant de fois deux angles droits, qu'il a de côtés, moins quatre angles droits.*

Fig. 163.

Soit le Poligone X :

Les Triangles dans lesquels il se réduit, valent, pris ensemble, autant de fois deux droits qu'il a de côtés, puisque ces Triangles sont aussi nombreux que les côtés du Poligone *, & que chaque Triangle vaut deux droits *.

* N. 234.
* N. 122.

Or les angles du Poligone, pris ensemble, valent ceux de tous ces

Triangles, hors leurs angles au centre A, qui valent quatre droits *, ayant pris ensemble, le cercle S pour mesure. * N. 94.

De-là, si dans un Poligone, on tire des lignes d'angle à angle, on le divise en autant de Triangles qu'il a de côtés, moins deux. Fig. 164.

Les lignes AB, AD, DC réduisent l'Exagone ACEDBF en quatre Triangles.

PROPOSITION III.

236. *Un cercle qui passe par un des sommets d'un Poligone régulier, passe par les autres sommets.* Fig. 165.

Soit le Poligone regulier X; je dis que le cercle qui passe par A, passe par B, par C, &c.

1°. Tirez les perpendiculaires DE, FE, sur le milieu D, ou F des côtés AB, BC : les angles ADE, BDE, étant droits, & compris entre côtés égaux, les Triangles AED, DEB sont

* N. égaux *, donc BE = AE.
136. Donc le cercle décrit du centre
*N.17. E par A passera par B *.

2°. Par la même raison, il passera par C, &c.

Ainsi, tout Poligone régulier peut s'inscrire dans un cercle.

PROPOSITION IV.

Fig. 166. 237. *Le côté* AB *d'un Exagone régulier inscrit est une corde de 60 dégrés.*

Ce côté soutient la sixième partie du cercle, ou un arc de 60 dégrés, sixième partie de 360, valeur du cercle * : donc c'est une corde de 60 dégrés.
*N.50.

PROPOSITION V.

Fig. 166. 238. *Le rayon* AC *du cercle est égal au côté* AB *de l'Exagone inscrit.*

1°. Les angles BAC, ABC opposés aux côtés ou rayons égaux
* N. 125. AC, BC sont égaux *.

2°. L'angle au centre C est de

60 dégrés, comme l'arc AB qui en est la mesure *. *N.93.

Donc les 2 angles BAC, ABC valant ensemble 120 dégrés, sont aussi de 60 dégrés chacun, puisqu'ils sont égaux.

Donc le Triangle est équilateral *; & par conséquent AC=AB. * N. 125.

339. *EUDOXE*. Mais il s'agit enfin d'inscrire des Poligones au cercle.

PROBLÉME I.

239. *Inscrire un Exagone régulier.* Fig. 167.

ARISTE. 1°. Avec une ouverture de compas égale au rayon AC, je divise le cercle en 6 arcs AB, BE, EF, FG, GH, HA.

2°. Je tire autant de cordes.

Et c'est l'Exagone inscrit, puisque chacune des six cordes est côté de 60 dégrés *. * N. 237.

De-là, joignez deux côtés FG, GH par une ligne droite FH: c'est un Triangle isocele inscrit *. * N. 127.

Joignez tous les côtés deux à deux : c'eſt un Triangle équilatéral BFH.

PROBLÉME II.

Fig. 168. 240. EUDOXE. *Inſcrire un Dodécagone.*

ARISTE. 1°. Du centre D, je tire une perpendiculaire DE, qui coupant par le milieu la corde ou le côté FG de l'Exagone inſcrit z, coupe l'arc FEG en deux arcs égaux, ou de 30 dégrés *.

*N. 58.

2°. Je mene la corde FE de 30 dégrés ; & c'eſt le côté du Dodécagone, puiſque 12 côtés de la ſorte ſoutiennent le cercle entier.

Diviſez de même le côté du Quarré inſcrit : vous aurez de même le côté de l'Octogone.

De-là, diviſant un arc par la moitié, ou le doublant, on a divers Poligones inſcrits.

PROBLÉME III.

241. EUDOXE. *Inſcrire un Décagone.*

ARISTE. La médiane du rayon coupé en moyenne & extrême raiſon, étant corde de 36 dégrés * eſt le côté du Décagone : car 36 × 10 = 360. * N. 164.

Cela poſé : ayant diviſé le rayon en moyenne & extrême raiſon *, je prens la médiane, ou la plus grande partie ; & c'eſt le côté du Décagone. * N. 162.

PROBLÉME IV.

242. EUDOXE. *Inſcrire un Pentagone.*

ARISTE. Je double l'arc du Décagone ; & la corde de l'arc double ſoutenant un arc de 72 dégrés *, c'eſt le côté du Pentagone, puiſque 5 × 72 = 360. * N. 241.

PROBLÉME V.

Fig. 169. 243. *EUDOXE. Inſcrire un Quindécagone, ou Poligone regulier de 15 côtés.*

ARISTE. 1°. J'inſcris un Triangle équilatéral ABC *. Les arcs AB, BC, CA ſont égaux, puiſqu'ils ſont ſoutenus par cordes égales *: donc l'arc AB, troiſième partie du cercle, contient cinq parties du cercle diviſé en 15.

* N. 239. *N 57.

2°. J'inſcris au même cercle un Pentagone régulier AEFGHA, ayant un angle en A; les cinq arcs AE, EF, FG, GH, HA, ſoutenus par cordes égales ſont égaux *: donc AE, cinquième partie du cercle diviſé en 15, en contient 3.

*N. 57.

3°. Puiſque AB en contient 5, & AE 3; EB, reſte de l'arc AB, en contient 2.

Donc ſi l'on diviſe l'arc EB par le milieu I, l'arc EI ſera la quinziè-

me partie du cercle : donc la corde EI sera côté du Quindécagone ; & portée 15 fois sur le cercle, elle donnera le Poligone entier.

De-là, le côté BF du Poligone de 15 côtés est une corde comprise entre la base BC du Triangle équilatéral, & la base FG du Pentagone inscrit au même cercle : car, puisque les cordes EI, IB, BF sont trois côtés, & que EI & IB en sont deux, il faut que BF en soit un.

PROBLÉME VI.

244. *EUDOXE. Circonscrire au cercle un Poligone régulier.* Fig. 170.

ARISTE. 1°. J'inscris un Poligone régulier ABCDEA semblable à celui que je veux circonscrire.

2°. Je mene des Tangentes par les sommets A, B, C, D, E ; & c'est le Poligone circonscrit.

Car tirez les perpendiculaires GH, GI, &c. sur les côtés AE,

ED, &c. du Poligone inſcrit; & les perpendiculaires GA, GE, ſur les côtés LH, HI du Poligone extérieur; ces perpendiculaires couperont les côtés & les arcs
*N.61. par le milieu *.
& 58. 1°. Les angles AGH, HGE, EGI, ſont égaux, ayant des Si-
*N.93. nus & des arcs égaux *.

2°. Les angles HAG, HEG, IEG, ſont égaux auſſi, étant droits ou formés par des Tangentes ſur des rayons.

Donc les Triangles GAH, GHE, GEI, qui ont deux angles égaux ſur côtés ou rayons
* N. égaux GA, GE, ſont égaux *.
137. Donc AH = HE = EI. Donc les moitiés des côtés du Poligone circonſcrit ſont égales: donc c'eſt un Poligone régulier circonſcrit.

PROBLÉME VII.

Fig. 171. 245. *EUDOXE. Circonſcrire un cercle*

cercle à un Poligone régulier.

Ariste. 1°. Je divise deux des côtés BC, CD par le milieu E, F, & tire les perpendiculaires EG, FG, qui me donnent le centre G *. *N. 68.

2°. Du centre G, intervalle GC, je décris un cercle qui passera par B, C, D, &c. sommets du Poligone.

Car 1°. Les côtés CE, CF, des Triangles EGC, FGC, sont égaux, par la construction; le côté CG est commun, & l'angle E = F puisqu'ils sont, tous les deux, droits, par la construction: donc le Triangle EGC = FGC: donc la perpendiculaire EG = FG.

2°. Les éloignemens du perpendicule EB, EC, FD, &c. sont égaux de même, par la construction; ainsi, les obliques GC, GB, GD, &c. sont égales *. *N. 36.

Donc le cercle qui passe par C, passe aussi par B, D, &c.

De-là, coupant les côtés d'un Poligone régulier par le milieu, & prénant pour rayon une ligne tirée du centre à l'angle de la figure, on circonscrira le cercle.

PROBLÉME VIII.

Fig. 172. 246. EUDOXE. *Inscrire un cercle dans un Poligone régulier.*

ARISTE. 1°. Je divise perpendiculairement les côtés BC, CD, &c. par le milieu E, F; & j'ai le *N. 68. centre G *.

2°. Du centre G, intervalle GE, je décris un cercle; & je dis que c'est le cercle inscrit, ou appuyé sur tous les côtés du Poligone, par exemple, sur F, comme sur E.

GF = GE, les apothémes d'un Poligone régulier étant égaux, puisque ses côtés qui sont cordes d'un cercle circonscrit, sont éga- *N. 64. lement éloignés du centre *: donc le cercle passant par E passe par F.

D'ailleurs, soit tirée CG; on

aura dans les Triangles EGC, FGC le côté CE=CF par la construction; le côté CG commun, & l'angle E=F puisquils sont tous les deux droits par la construction: donc GF=GE: donc le cercle qui touche en E, touche en F.

Eudoxe. Mais enfin, quelle est la valeur de l'aire ou de la surface d'un Poligone régulier inscrit ou circonscrit?

Ariste. Une Proposition va nous dire ce qui en est.

PROPOSITION VI.

247. *L'aire, x, d'un Poligone régulier vaut un Triangle, z, qui a pour* Fig. 173.
base le circuit, & pour hauteur l'Apothéme BD *du Poligone.*

Soient 1°. x réduite en Triangles * de même base & de même * N. 234.
hauteur, puisque par la construction le côté AC=CE=EF=FG=GH=HA, & que l'apothéme BI=BD, &c. * les cordes * N. 64.
égales AC, CE, &c. étant égale-

ment éloignées du centre B; 2°. La base KL = AC + CE + EF, &c. 3°. La hauteur KM = BD.

Je dis que $x = z$.

La surface x vaut tous les Triangles dans lesquels on la réduite; & ces Triangles, pris ensemble, valent z, qui a base égale & éga-
* N. le hauteur *.
188. Donc $x = z$.
* Fig. 248. De-là, 1°. La surface
173. d'un Poligone régulier vaut la moitié du rectangle KP qui a pour base le circuit & pour hauteur l'apothéme du Poligone, puisqu'el-
* N. le vaut un Triangle z *, qui est la
247. moitié de ce rectangle *.
* N.
187. 249. 2°. La même surface vaut un rectangle OK, qui a pour base la moitié KN du circuit = KL, & pour hauteur l'apothéme KM: car elle vaut le Triangle z, qui étant moitié du rectangle KP, vaut le rectangle OK, moitié de KP.

Enfin, après avoir parlé des

Poligones en général & en particulier; voulez-vous, Eudoxe, que nous les comparions pour nous rappeller les propriétés si utiles des Poligones semblables; ou bien, irons-nous prendre l'air & voir éclore les Tulipes, les Œillets, les Roses?

Eudoxe. Les fleurs réveilleront des idées moins claires, mais un peu plus gayes.

X. ENTRETIEN.

Sur les Poligones semblables.

Eudoxe. LEs fleurs, Ariste, ne m'ont pas fait oublier les Poligones; & des idées gayes, mais obscures, n'ont point effacé des idées seches, mais claires, que je préfere aux autres.

Ariste. Cela m'engage à continuer de m'expliquer en Proposi-

tions ſuivies, pour m'expliquer plus nettement.

Proposition I.

250. *Deux Poligones réguliers*
Fig. 174. *de même nom ſont ſemblables.*

Soient deux Pentagones réguliers R, S.

De même nom, ou Pentagones, ils ont même nombre d'an-
* N. 227. gles & de côtés *; réguliers, ils ont, les angles égaux, chacun,
* N. 228. & les côtés *.

Et je dis que R & S ſont ſemblables.

1°. Les angles de R ſont égaux à ceux de S: car les angles égaux de R ſont auſſi nombreux que les angles égaux de S; & le nombre des côtés étant égal, les angles de part & d'autre valent même nom-
* N. 235. bre de droits *.

2°. Les côtés de R ſont proportionnels aux côtés de S, puiſque côtés égaux entre eux, ont même

raiſon à côtés égaux entre eux.

Donc R & S ſont ſemblables.

D'ailleurs ; les arcs ſoutenus par les côtés égaux de R ſont ſemblables aux arcs égaux correſpondants de S *. *N. 51.

Cela poſé ; je dis que l'angle ABC = DEF, & que le côté AB. DE : : BC. EF.

1°. L'angle ABC & l'angle DEF ſont inſcrits & appuyés ſur arcs ſemblables AGHC, DIKF : donc l'angle ABC = DEF *. * N. 114.

2°. Le côté AB = BC, & le côté DE = EF : donc AB. BC : : DE. EF : donc AB. DE : : BC. EF (*a*).

PROPOSITION II.

251. *Les circuits ou périmétres de deux Poligones ſemblables réguliers, ou non, ſont entre eux comme le côté de l'un au côté homologue ou ſemblable de l'autre.* Fig. 174.

1°. Soient deux Poligones ſem-

(*a*) Calcul Numérique, N. 144.

blables réguliers, deux Pentagones, dont le périmétre du prémier soit R, & celui du second, S; deux côtés homologues, ou semblables DE, AB: je dis que R.S :: DE.AB.

Les touts sont comme les parties semblables (*a*) : donc R. S :: DE. AB.

Aussi, R = 5 DE, S = 5 AB : or 5 DE. 5 AB :: DE. AB, les produits par même multiplicateur étant comme les grandeurs multipliées (*b*) : donc R. S :: DE. AB.

Fig. 175. 2°. Soient deux Poligones semblables & réguliers ABCDE, FGHIK, ou *x* & *z*; deux côtés semblables AB, FG.

Je dis que *x*. *z* :: AB. FG.

Les touts sont comme les parties semblables : donc *x*. *z* :: AB. FG.

Aussi, BC. GH :: CD. HI :: DE. IK :: EA. KF :: AB. FG * *N. 233.*

(*a*) Calcul Numérique, N. 99.
(*b*) Ibid. N. 149.

par

par la définition des Poligones semblables.

Donc tous les côtés de *x* sont aux côtés homologues de *z*, comme AB est à FG :

Donc *x*. *z* :: AB. FG *. *N. 8.

PROPOSITION III.

252. *Deux Poligones réguliers & semblables se réduisent en Triangles semblables.* Fig. 176.

Soient les Pentagones réguliers & semblables R, S, inscrits.

Tirant des lignes du centre aux angles, on réduit les polignes en autant de Triangles qu'ils ont de côtés * ; & ces Triangles sont semblables. * N. 234.

Je dis donc que les Triangles CDR & ABS sont semblables.

1°. Les angles au centre CRD, ASB sont égaux * puisqu'ils ont *N. 93. pour mesure des arcs semblables, CD, AB *, qui sont, chacun, *N. 51. la cinquième partie de leur cercle.

2°. Les angles à la baſe C, D ; A, B, ſont égaux auſſi : car les Triangles ſont iſoceles, puiſque le rayon CR = RD, & le rayon AS = BS ; & par conſéquent, les angles aux ſommets R, S, étant égaux, les angles à la baſe le

* N. 133. ſont *.

Donc les Triangles CDR & ABS, ayant tous leurs angles égaux, chacun à chacun, ſont

* N. 130. ſemblables *.

PROPOSITION IV.

Fig. 176. 253. *Les circuits x, z de deux Poligones réguliers & ſemblables ſont comme les rayons.*

Je dis que le circuit $x . z$ :: CR. AS.

* N. 251. $x . z$ :: CD. AB * : or puiſque les Triangles CDR, ABS ſont

* N. 252. ſemblables *, CD. AB :: CR. AS ; car dans ces Triangles, les côtés homologues ſont propor-

* N. 150. tionnels * ;

Donc $x.z$: : CR. AS.

254. De-là, 1°. Les circuits de deux poligones réguliers & ſemblables ſont comme leurs diamétres, étant comme les demi-diamétres, ou les rayons.

2°. Ces circuits x, z, ſont comme les apothémes ou rayons RF, SE :

Car les Triangles CRF, ASE, ſont ſemblables, puiſque les angles C, A ſont égaux*, & les angles F, E, droits, l'apothéme RF, ou SE étant perpendiculaire*. * N. 252. * N. 232.

Cela ſuppoſé ; les rayons CR, AS, ſont comme les apothémes RF, SE* ; or les circuits x, z, ſont comme les rayons CR, AS : donc les circuits ſont comme les apothémes. * N. 150.

Si les poligones x, z, étoient circonſcrits, on trouveroit de même la même choſe.

PROPOSITION V.

255. *Deux Poligones réguliers & ſemblables, inſcrits ou circonſcrits ſont en raiſon doublée de celles de leurs côtés homologues, ou comme les quarrés de ces côtés.*

Ces Poligones ſont comme les Triangles ſemblables dans leſquels ils ſe réſolvent *. Or ces Triangles ſont en raiſon doublée de celles de leurs côtés homologues, ou comme les quarrés de ces côtés *.

* N. 252.

* N. 197.

De là, les Poligones réguliers & ſemblables ſont comme les quarrés des rayons, côtés de ces Triangles.

EUDOXE. Ainſi, doublant la raiſon des côtés ou des rayons, l'on aura dans la raiſon des produits des antécédens & du produit des conſéquens, la raiſon des Poligones. Si les expoſans de la raiſon de deux côtés ſemblables ſont 1, 2;

doublez 1, 2, vous avez 1, 2; 1, 2: puis multipliez 1 par 1, 2 par 2: vous aurez dans les quarrés 1, 4 la raison des deux Poligones; c'est-à-dire, que l'un est à l'autre comme 1 à 4.

256. Mais les Poligones semblables irréguliers ABCDE, FGHIK.... Fig. 177.

Ariste. Ces Poligones, aussi-bien que les réguliers, se réduisent en Triangles semblables.

Car 1°. Les Triangles ABE, FGK sont semblables*, puisque par l'hypothèse, l'angle A = F, & les côtés AE, AB, & FK, FG, qui comprennent l'angle égal, sont proportionnels. * N. 160.

2°. Les Triangles DCE, IHK sont semblables aussi par la même raison.

3°. Les Triangles BEC, GKH, le sont: car l'angle ABC = FGH, & l'angle ABE = FGK: donc l'angle EBC = KGH, les restes

étant égaux lorsque de choses égales on ôte choses égales:

De même l'angle BCD = GHI, & l'angle ECD = KHI: donc l'angle BCE = GHK.

257. Ainsi, tous les Poligones semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues, puisqu'ils se réduisent tous en Triangles semblables qui sont
* N. 197. comme les quarrés de leurs côtés*.

PROPOSITION VI.

258. *Si l'on fait sur les trois côtés d'un Triangle rectangle trois Poligones semblables, le Poligone construit sur l'hypoténuse est égal aux deux autres.*

Ces Poligones sont comme les
* N. 257. quarrés de leurs côtés *, qui sont côtés du Triangle: or le quarré de l'hypoténuse est égal aux quar-
* N. 204. rés des deux autres côtés *: donc le Poligone construit sur l'hypoténuse est égal aux deux autres.

PROPOSITION VII.

259. *Enfin, ſi trois lignes ſont en proportion continue, le Poligone conſtruit ſur la première, eſt au Poligone fait ſur la ſeconde, comme la première à la troiſième.*

Le quarré de la première eſt au quarré de la ſeconde, comme la première à la troiſième (*a*).

Or les Poligones ſont comme les quarrés de leurs côtés proportionnels*: donc le Poligone ſur la première eſt au Poligone ſur la ſeconde, comme la première à la troiſième. * N. 254.

260. EUDOXE. J'apperçois; ce ſemble, le cercle qui s'approche à la ſuite des Poligones : mais avant qu'il ſoit queſtion du cercle, il faut meſurer un Poligone rectiligne quelconque.

ARISTE. Hé bien, 1°. Je le ré-

(*a*) Calcul Littéral, N. 148.

* N. duis en Triangles *.

234. 2°. Du ſommet de chaque Triangle j'abaiſſe une perpendi-
* N. 28. culaire ſur ſa baſe * :

3°. Multipliant ſéparément la baſe de chaque Triangle par la moitié de la perpendiculaire ou de la hauteur, j'ai les ſurfaces des
* N. Triangles *.

189. Enfin, ajoutant ces ſurfaces, j'ai dans la ſomme la valeur du
* N. 6. Poligone *, puiſque le tout, ou ſes parties priſes enſemble, ſont même choſe.

Après cela, le cercle vient à propos.

EUDOXE. Pour être le ſujet d'un Entretien.



XI. ENTRETIEN.

Sur les Cercles en particulier.

Eudoxe. IL s'agit donc du cercle ; nous ne l'avons point perdu de vûë, & je vous laisserai tout le loisir de nous rappeller les propriétés des cercles les plus intéressantes.

Ariste. Il se trouve, pour ainsi dire, entre le Poligone inscrit & le Poligone circonscrit ; & quelques Propositions nous y conduiront bientôt.

Proposition I.

261. *Si l'on inserit dans un cercle deux Poligones réguliers, x, z,* Fig. 178.
celui qui a plus de côtes a plus de circuit.

Soit *x*, Décagone ; z, Pentagone : je dis que le circuit ou le

perimétre de *x* eſt plus grand que celui de z.

La ligne courbe ABC, cinquième partie du circuit de *x*, eſt plus grande que la droite AC cinquième partie de z *: donc le circuit de *x* eſt plus grand.

*N.15.

Par le même principe, le Poligone inſcrit *x*, qui a plus de côtés, a plus de ſurface : car le ſegment ABCD eſt la 5ᵉ. partie de *x*, comme ACD eſt la 5ᵉ. de z : or ABCD > ACD de la valeur du Triangle ACB.

PROPOSITION II.

Fig. 179. 262. *De deux Poligones x, z, circonſcrits au cercle, celui qui a plus de côtés, a moins de circuit.*

Soit *x*, Décagone ; z, Pentagone : je dis que le circuit de *x* eſt plus petit que celui de z.

AB + BC eſt la cinquième partie de *x*, comme AB + BE + EC, eſt la cinquième de z : or AB

$+ BC < AB + BE + EC$, puisque $BC < BE + EC$*, & que le reste AB est commun; donc le circuit de x est plus petit. *N. 15.

PROPOSITION III.

263. *On peut regarder le cercle comme un Poligone régulier d'une infinité de côtés.*

Plus le Poligone régulier inscrit a de côtés, plus il est grand & approchant du cercle*; & plus le Poligone circonscrit a de côtés, plus il est petit & approchant du cercle* : donc un Poligone régulier d'une infinité de côtés approche tellement du cercle qu'on ne peut en approcher davantage, ou n'en différe pas : donc on peut regarder le cercle comme un Poligone régulier d'une infinité de côtés. *N. 261. *N. 262.

EUDOXE. Ainsi, la circonférence du cercle sera formée de lignes droites.

ARISTE. Oui, mais infiniment petites; & comme ces lignes sont infiniment petites, la différence des apothémes & des rayons est infiniment petite.

PROPOSITION IV.

264. *Les cercles sont des Poligones semblables.*

Les cercles sont des Poligones réguliers de même nom, ou d'u-
* N. ne infinité de côtés * : donc ce
263. sont des Poligones semblables *.
* N.
250.

PROPOSITION V.

265. *Les circonférences de cercle sont comme les rayons, ou comme les diamétres.*

Les circonférences sont circuits de Poligones réguliers &
* N. semblables * : or ces circuits sont
264. * N. comme les rayons * ou comme
263. les diamétres, doubles des rayons. De-là;

I.

266. *Les arcs semblables sont comme les rayons.*

Ces arcs sont comme les circonférences, les parties semblables étant comme les touts : or les circonférences sont comme les rayons *. * N. 265.

II.

267. *Les cordes* AB, CD, *qui soutiennent des arcs semblables* AIB, CND *sont entre-elles, comme ces arcs.* Fig. 180.

Car 1°. Les Triangles AEB, CFD sont isoceles, ayant, chacun, deux côtés égaux, ou rayons du même cercle.

2°. Les angles au centre E, F sont égaux *, puisqu'ils ont pour mesure arcs semblables : donc les angles A, B; C, D sur la base sont égaux *; & par conséquent les Triangles AEB, CFD sont * N. 93. * N. 133.

* N. 130. équiangles * ; ainsi, les côtés étant proportionnels, les cordes AB, CD, sont comme les rayons BE, DF : or les rayons sont com-
* N. 266. me les arcs semblables * : donc les cordes sont de même.

III.

Fig. 180. 268. *Les Sinus* AG, CH, *des arcs semblables* AI, CN, *sont comme ces arcs.*

Je dis que AG. CH : : AI. CN.

Les angles AEI, CFN sont
*N. 93. égaux *, ayant pour mesures des arcs semblables AI, CN; & les angles AGE, CHF sont droits, puisque les Sinus AG, CH, sont perpendiculaires sur les rayons EGI, FHN : donc les Triangles
* N. 130. EAG, FCH, sont semblables * : donc AG. CH : : AE. CF : or
* N. 266. AE. CF : : AI. CN *, les rayons étant comme les arcs : donc AG. CH : : AI. CN.

IV.

269. *Les Tangentes* AB, CD *des arcs semblables* AE, CF, *sont comme ces arcs.* Fig. 181.

Je dis, que AB. CD : : AE. CF.

Les angles au centre G, H, sont égaux *, puisqu'ils ont pour mesures des arcs semblables; & les angles BAG, DCH faits par les Tangentes sont droits * : donc les Triangles AGB, CHD sont équiangles *, & par conséquent ils ont leurs côtés proportionnels * : donc AB. CD : : AG. CH : or AG. CH : : AE. CF * : donc AB. CD : : AE. CF. *N. 93. *N. 79. *N. 133. *N. 150. *N. 266.

270. Par la même raison, les Sécantes BG, DH des arcs semblables AE, CF, sont comme ces arcs.

V.

271. *Néanmoins, dans le même cercle, ou dans les cercles égaux, les* Fig. 182.

cordes des arcs différents ne ſont pas comme leurs arcs.

Soient AB, corde de l'arc ACB, & AD, corde de l'arc ACBED, double de l'arc ACB.

Je dis que AD n'eſt point à AB, comme ACBED eſt à ACB.

ACBED = 2ACB : or on ne peut pas dire que AD = 2AB, ou
*N.15. AB + BD *, puiſque AD eſt ligne droite, & AB + BD, ligne courbe entre mêmes points A, D.

Ainſi les Sinus qui ſont moitiés de cordes de ces arcs différents, ne ſont pas comme les arcs dont ils ſont Sinus.

PROPOSITION VI.

272. *Les cercles ſont comme les quarrés des rayons ou des circonférences.*

Les cercles ſont des Poligones
* N. réguliers & ſemblables * : or les
264. Poligones de cette eſpèce ſont comme les quarrés des rayons ou de

de leurs côtés homologues, & par conséquent des circonférences composées de ces côtés.

PROPOSITION VII.

273. *Un cercle qui a pour rayon l'hypoténuse d'un Triangle rectangle, vaut les deux cercles dont chacun a pour rayon l'un des côtés.*

Les cercles sont entre-eux comme les quarrés des rayons *: or le quarré de l'hypoténuse vaut les quarrés des côtés *. * N. 272. * N. 204.

De-là, 1°. Le cercle qui a pour diamétre l'hypoténuse, vaut les deux cercles, dont chacun a pour diamétre l'un des côtés.

274. Ainsi le demi-cercle AECL sur l'hypoténuse AC d'un Triangle rectangle, vaut les deux demi-cercles AFBI, BGCK, sur les côtés AB, BC. Fig. 183.

2°. Les Lunules AFBH, BGCE, prises ensemble, sont égales au Triangle rectangle ABC.

Car les deux demi-cercles AFBI, BGCK, pris ensemble, & le demi-cercle AECL, sont
* N. 274. grandeurs égales * : donc si l'on ôte de ces trois grandeurs les segmens communs AHBI, BECK, les restes, c'est-à-dire, les Lunules AFBH, BGCE d'une part & le Triangle ABC de l'autre, seront égaux.

Proposition VIII.

275. *L'aire du cercle entier est égale au Triangle rectangle qui a pour base la circonférence & pour hauteur le rayon du cercle.*

L'aire d'un Poligone régulier vaut un Triangle rectangle qui a pour base le circuit du Poligone, & pour hauteur l'apothéme du Po-
* N. 247. ligone * : or le cercle est un Poligone régulier qui a pour apothéme le rayon ; car dans le cercle la différence de l'apothéme & du
* N. 263. rayon est infiniment petite *.

Eudoxe. La Proposition se dé-

montre, ce semble, encore autrement.

Ariste. Vous la démontrerez donc, Eudoxe.

Eudoxe. Volontiers. Traçons d'abord une figure ....

Soient les circonférences concentriques s, t, y, z, qui font l'aire X du cercle ; le rayon AB ; les Tangentes BC = s, mn, op, qr, faisant des Triangles, qui ayant les angles B, m, o, q, droits, & l'angle A commun, sont semblables *. Fig. 184. * N. 133.

Je dis que X vaut le Triangle rectangle ABC.

1°. mn. BC : : Am. AB, à cause des Triangles semblables *. * N. 150.

2°. t. s : : Am. AB *, les circonférences étant comme les rayons. * N. 265.

Donc mn. BC : : t. s, puisque deux raisons égales à une troisième, le sont entr'elles (*a*).

(*a*) Calcul Littéral, N. 104.

* N. 144. Donc $mn . t :: BC . s$ * en raison alterne.

Or $BC = s$, par l'hypothèse.

Donc $mn = t$.

Par la même raison, $op = y$, $qr = z$, &c.

Donc $X = ABC$.

276. *ARISTE*. Ainsi, 1°. L'aire du cercle X vaut la moitié d'un Parallelograme qui a pour base la circonférence & pour hauteur le rayon du cercle, puisqu'elle vaut un Triangle rectangle ABC qui est la moitié de ce parallelograme *.

* N. 187. 277. 2°. Le cercle X vaut un Parallelograme qui a pour base la moitié de la circonférence & pour hauteur le rayon du cercle, puisqu'il vaut un Triangle ABC égal à un Parallelograme de cette espéce *.

* N. 249.

PROPOSITION IX.

278. *Une ligne disposée en cir-*

conférence de cercle contient plus d'espace qu'en quarré.

Soit la même ligne, figurée en circonférence de cercle ABC, & en quarré EFGH: je dis que la surface du cercle est plus grande que celle du quarré. Fig. 185.

La surface du cercle est égale à un Triangle rectangle qui a pour base la circonférence & pour hauteur le rayon DA*; & le quarré est égal à un Triangle rectangle qui a pour base la même circonférence, & pour hauteur l'apothéme DI: * N. 275.

Or DA > DI*: donc le Triangle qui a DA pour hauteur est plus grand que le Triangle qui a DI*, les Triangles de même base étant comme leurs hauteurs: donc une ligne disposée en circonférence de cercle contient plus d'espace qu'en quarré. * N. 247. * N. 188.

Par la même raison, la ligne disposée en circonférence de cer-

cle comprend plus d'eſpace ; qu'en toute autre figure Poligone réguliere.

De-là, le cercle eſt la plus grande des figures *Iſopérimétres*, ou qui ont les contours égaux.

PROPOSITION X.

279. *Le diamétre du cercle eſt la troiſième partie du circuit d'un Exagone.*

Le demi-diamétre eſt la ſixième partie *: donc le diamétre eſt
*N. 238. la troiſième.

PROPOSITION XI.

280. *Le diamétre eſt plus petit que la troiſième partie de la circonférence du cercle.*

Le diamétre eſt la troiſième
*N. 279. partie du circuit de l'Exagone *, plus petit que la circonférence du
*N. 261. cercle *, puis que le Poligone inſcrit, qui a plus de côtés, a plus de circuit.

PROPOSITION XII.

281. *Le diamétre du cercle est, à peu près, la troisième partie de la circonférence.*

On sçait qu'Archimede comparant avec le diamétre un Poligone de 96 côtés circonscrit au cercle & un Poligone inscrit de 96 côtés, trouva que celui-là étoit au diamétre comme 22 à 7; & celui-ci, comme 223 à 71, ou comme 21, $\frac{70}{71}$ à 7.

Cela posé; 1°. Le Poligone circonscrit de 96 côtés est au diamétre comme 22 à 7: or ce Poligone est plus grand que la circonférence*: donc la raison de la circonférence au diamétre est moindre que celle de 22 à 7. * N. 262.

2°. Le Poligone inscrit de 96 côtés est au diamétre, comme 223 à 71: donc la raison de ce Poligone au diamétre est plus grande que celle de 21 à 7: car 213.

71 : : 21 . 7 : 213 contient 3 fois 71, comme 21, contient 3 fois 7. Or la circonférence du cercle est plus grande que le Poligone
* N. 261. inscrit de 96 côtés*: donc la raison de la circonférence au diamétre est plus grande que celle de 21 à 7.

Ainsi, la raison de la circonférence au diamétre est moindre que celle de 22 à 7, & plus grande que celle de 21 à 7.

Donc le diamétre est à la circonférence comme 7 à une quantité plus grande que 21, mais plus petite que 22.

Or 7 est, à peu près, la troisième partie de cette quantité:

Donc le diamétre est, à peu près, la troisième partie de la circonférence.

282. EUDOXE. Ainsi connoissant le diamétre, si vous dites: 7 . 22 : : diamétre . x, le quatrième terme sera la circonférence,

ou à peu près *. 3 fois le diamétre, un peu plus; ou 22 parties, un peu moins, telles que le diamétre en contient 7, vous la donneront : * N. 281.

Mais, s'il faut trouver l'aire du cercle .....

Ariste. 1°. Je prens la circonférence *. * N. 282.

2°. Je multiplie la moitié de la circonférence par le rayon; & le produit est l'aire du cercle *. * N. 277.

283. Enfin, le *Secteur* est une partie du cercle terminée par une partie de la circonférence & par deux rayons qui ne fassent pas une ligne droite.

Ainsi le Secteur doit être plus petit ou plus grand que le demi-cercle comme CBDC, ou AB-CDEA. Fig. 186.

Le cercle étant un Poligone régulier d'une infinité de côtés *, il peut se réduire en une infinité de Triangles de bases égales & d'é- * N. 263.

* N. 234. gales hauteurs *; par conséquent le Secteur CBDC est composé d'un certain nombre de Triangles de même hauteur, ayant leur sommet commun dans le centre B du cercle, & leurs bases égales dans l'arc CD, qui est la base du Secteur.

Or tous ces Triangles en valent un de même hauteur, & dont la base soit égale à celles des
* N. 190. Triangles prises ensemble *.

Donc le Secteur CBDC vaut un Triangle de même hauteur & de base égale.

Par la même raison, tout autre Secteur du même cercle, comme CBAEDC, vaudra un Triangle de même hauteur & de base égale à celle du Secteur.

Cela posé:

PROPOSITION XII.

284. *Deux Secteurs du même*

cercle sont entr'eux comme leurs bases, ou leurs arcs.

Ces deux Secteurs valent deux Triangles de même hauteur qu'eux, & dont les bases soient égales à celles des Secteurs *. * N 283.

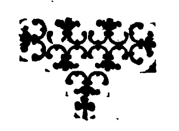
Or les Triangles de même hauteur sont comme leurs bases *. * N. 188.

Donc les deux Secteurs du même cercle sont entr'eux comme leurs bases ou leurs arcs.

Après cela nous pouvons transformer les Poligones.

Eudoxe. J'ai un moment de libre ce soir.

Ariste. Cela suffit.



XII. ENTRETIEN.

Sur la transformation des Poligones en d'autres figures de même aire.

ARISTE. JE le vois bien, Eudoxe; vous êtes homme de parole.

285. *EUDOXE.* Je profite d'un instant libre. Commençons par réduire un Pentagone en Quadrilatere de même surface.

Fig. 187. *ARISTE.* Soit le Pentagone irrégulier BCDEF.....

Je tire d'abord de l'angle D à l'angle opposé B une ligne droite DB; puis sur FB prolongée en G, la ligne CG parallele à DB; enfin, la diagonale DG.

Et je dis que le Quadrilatere GDEF est égal au Pentagone BCDEF.

Le Triangle BDG = BDC;

ayant même base BD & même hauteur entre mêmes paralleles BD, GC*: donc mettant le Triangle BDG à la place de BDC, j'ai même valeur, ou GDEF = BCDEF. * N. 188.

On peut réduire de même un Exagone, un Poligone quelconque.

286. EUDOXE. *Ce Quadrilatere GDEF, il faut le réduire en Triangle.* Fig. 188.

ARISTE. Je tire d'abord de l'angle D à l'angle opposé F la droite DF; puis, sur GF prolongée, la ligne EH parallele à DF; enfin la diagonale DH.

Et puisque le Triangle DFH = DFE sur même base DF & entre mêmes paralleles DF, EH*, le Triangle GDH est égal au Quadrilatere GDEF. * N. 188.

287. EUDOXE. *Ce Triangle GDH, il faut le réduire en Triangle rectangle isocele.* Fig. 189.

ARISTE. 1°. Par le sommet D, je
tire une parallele IK à la base GH.

2°. Sur les extrémités G, H,
de la base, j'éleve deux perpendi-
* N. culaires, GI, HK*; & j'ai un
115. * N. Rectangle GK* double du Trian-
170. gle GDH de même base & de
* N. même hauteur*.

187. 3°. Je prens une moyenne pro-
portionnelle entre les côtés GH
* N. & GI du rectangle*; & le quar-
158. ré de cette moyenne vaut le rec-
tangle, puisque le rectangle est le
produit des extrêmes GH, GI,
& que le quarré de la moyenne
vaut le produit des extrêmes (*a*).

Fig. Enfin, soit ce quarré; je le
190. partage en deux Triangles rec-
tangles isoceles LMN, NMO
* N. par la diagonale MN*.

139. Et je dis que le Triangle GDH
Fig. = LMN.

189 & Le Triangle GDH est moitié
190. du rectangle GK; & le Triangle

(*a*) Calcul Littéral, N. 136.

LMN, moitié du quarré LO = GK.

Or les moitiés de tous égaux ſont égales * : donc le Triangle GDH = LMN. *N. 11.

288. *EUDOXE. Ce Triangle rectangle iſocele*, LMN, *il faut le réduire en parallelograme rectangle.* Fig. 191.

ARISTE. Ayant abaiſſé une perpendiculaire LP du ſommet L ſur la baſe MN, je fais un Rectangle RTVS qui ait pour baſe une ligne VS = MN, & pour hauteur une ligne RV = $\frac{1}{2}$ LP, & ce rectangle RTVS eſt égal au Trian- LMN*. * N. 189.

289. *EUDOXE. Ce rectangle* RTVS, *il faut le transformer en quarré.* Fig. 192.

ARISTE. Je prens, comme je l'ai fait*, une moyenne proportionnelle entre les deux côtés du rectangle; je fais un quarré ſur cette moyenne proportionnelle, & c'eſt le quarré égal au rectangle(*a*). * N. 287.

(*a*) Calcul Littéral, N. 136.

290. *EUDOXE. Enfin, il faut décrire un parallelograme égal à un rectiligne donné.*

ARISTE. Je réduis le rectiligne
* N. 285 & 286. en un Triangle *; & ce Triangle je le transforme en parallelogra-
* N. 288. me *.

EUDOXE. Et c'en est assez.

ARISTE. Les plans en général nous occuperont un peu plus.

XIII. ENTRETIEN.

Sur les Plans en général.

EUDOXE. VOus me parlerez de Plans, Ariste; je vous parlerai de nouvelles.

Vous direz des vérités; je dirai des vrai-semblances, au plus: commençons par les vérités qui sont plus intéressantes pour vous & pour moi.

Fig. 193. 291. *ARISTE.* Hé bien, une ligne est perpendiculaire à un

plan, lorsqu'elle l'est à toutes les lignes qu'elle rencontre dans ce plan, puisque le plan est composé de toutes ces lignes. Ainsi, BC, perpendiculaire sur ED, FG, &c. l'est au plan EFDGC.

292. L'inclinaison d'une ligne à un plan est l'angle aigu qu'elle fait avec le plan.

293. Plans semblables sont ceux dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

294. Comme le produit d'une ligne droite par une autre est un plan, le produit d'un nombre par un autre, est une sorte de plan regardé comme un rectangle; & les nombres plans sont semblables quand leurs racines ou leurs côtés sont proportionnels; tels sont 6 & 24: en effet, $2 \times 3 = 6$, $6 \times 4 = 24$; & $2 . 4 :: 3 . 6$.

Si deux nombres plans sont semblables, ou que leurs côtés soient proportionnels, ils ont pour ex-

posans des nombres quarrés (*a*) : ainsi comme le produit d'un quarré par un quarré est un quarré (*b*), le produit de ces plans est un quarré, dont la racine est moyenne proportionnelle entre ces plans (*c*) : de-là, il y a toujours entre deux nombres plans semblables un moyen proportionnel.

Soient 6, 24, nombres plans semblables : 6 × 24 = 144, nombre quarré, dont la racine 12 est moyenne proportionnelle entre 6 & 24.

Cela supposé ;

PROPOSITION I.

295. *Si une ligne est perpendiculaire sur deux lignes qui se coupent dans un plan, elle l'est au plan, ou à toute ligne qui passe par le point de rencontre.*

Soit BC perpendiculaire sur ED

(*a*) Calcul numérique, N. 189.
(*b*) Ibid. N. 23.
(*c*) Ibid. N. 136.

& FG; faites CF = CG, & CD = CE = CF: tirez HI, EF, GD, EG, FD, BF, BG, BE & BD, BH & BI. Fig. 194.

Je dis que BC est perpendiculaire sur HI.

1°. Les Triangles BCF, BCG, BCE, BCD, ayant les côtés CF, CG, CD, CE égaux, le côté BC commun, & l'angle compris en C, droit*, sont égaux**: donc les bases BF, BG, BE, BD sont égales. *N. 95. ** N. 136.

2°. Les Triangles ECF, GCD, qui ont les côtés CF, CG, CE, CD égaux par la construction, & les angles FCE, DCG compris & opposés au sommet, égaux*, sont isoceles égaux*, donc les angles CFE, CGD, CEF, CDG sont égaux, & la base EF = GD. *N. 98. * N. 127.

3°. Les Triangles HCF, GCI, ayant les angles opposés au sommet C égaux, aussi-bien que les angles CFH, CGI, & les côtés

* N. CF, CG, sont égaux *.
137. Donc le côté CH=CI, & FH=GI.

4°. Les Triangles BFE, BDG, ayant les côtés BF, BG, BE, BD égaux, & les bases EF, GD
* N. égales, sont isoceles égaux *:
134. donc ils ont les angles BGD, BFE, ou BGI, BFH, égaux.

Enfin, les Triangles BFH, BGI, qui ont les côtés BF, BG égaux, aussi-bien que FH, GI, avec les angles BFH, BGI, sont égaux. Donc ils ont les bases BH, BI égales.

Donc BC a deux points dont chacun est également éloigné des points opposés H, I, sçavoir, C & B:

Donc BC est perpendiculaire
* N. 23. sur HI *.

PROPOSITION II.

296. *Deux lignes perpendiculaires au même plan sont paralleles.*

Fig. 195. Soient BC, DE, perpendicu-

laires au plan FG :

Je dis que BC, DE sont paralles.

BC & DE sont perpendiculaires à toutes les lignes qu'elles coupent, ou qui les coupent dans le plan *, & par conséquent sur EC. * N. 295.
Or deux perpendiculaires sur une ligne sont paralleles * : donc BC, *N.44.
DE sont paralleles.

PROPOSITION III.

297. *Une ligne droite qui joint deux paralleles, est dans le même plan.*

Si la droite qui joint les 2 paral- Fig.
leles BC, DE, n'est pas comme 196.
FGH dans leur plan, mais hors de leur plan, comme FIH; deux droites FGH, FIH, enfermeront un espace, ce qui n'est pas possible, puisque deux lignes droites qui partent d'un point, font un angle rectiligne *, qui ne bor- *N.92.
ne pas l'espace de tous côtés.

De-là, deux paralleles sont

dans le même plan.

Proposition IV.

Fig. 295. 298. *De deux paralleles, si l'une est perpendiculaire sur un plan, l'autre l'est.*

Je dis que si la ligne DE est perpendiculaire sur le plan FG, la parallele CB est perpendiculaire de même.

Approchez CB de ED parallelement, ou sans l'incliner: jointe, elle sera perpendiculaire comme ED: donc n'ayant pas panché, elle l'étoit auparavant.

Proposition V.

299. *Dès qu'une ligne d'un plan est perpendiculaire à un autre plan, le plan où elle se trouve, est perpendiculaire.*

Fig. 297. Soit CD, commune section des plans BD, EF:

Si la ligne BC du plan BD est perpendiculaire sur le plan EF,

je dis que le plan BD l'eſt.

Dès que la ligne BC eſt perpendiculaire, une autre ligne quelconque GH du même plan BD l'eſt : car un plan eſt composé de lignes paralleles * ; & dès qu'une parallele eſt perpendiculaire ſur un plan, l'autre l'eſt *.

*N.90.

* N. 298.

De-là, l'inclinaiſon d'un plan à un plan eſt l'angle aigu ABC fait par la rencontre de deux lignes perpendiculaires AB, CB ſur la commune ſection DE, tirées l'une dans un plan EF, l'autre dans l'autre plan DG.

Fig. 198.

Et un plan incliné eſt un plan qui fait avec un plan un angle aigu.

300. *Eudoxe.* Vous n'irez pas plus loin ſans réſoudre quelques Problêmes.

D'abord, d'un point donné B *hors d'un plan* CD, *il faut tirer une perpendiculaire ſur ce plan.*

Fig. 199.

Ariste. Soit la ligne EG priſe

à volonté dans le plan CD, & BF perpendiculaire sur EG, mais inclinée au plan.

Je tire dans le plan CD la ligne FH perpendiculaire à EG; BH perpendiculaire sur FH, IH parallele a EG.

Et je dis que BH est perpendiculaire au plan CD.

1°. EF étant perpendiculaire sur BF & FH *, l'est sur le plan
*N. 27. BFH, puisqu'une ligne perpendiculaire sur deux lignes qui se coupent dans un plan, l'est sur le
* N. 295. plan *.

2°. IH parallele à EF est donc aussi perpendiculaire au plan
* N. 298. BFH *.

Donc BH est perpendiculaire à deux lignes FH, IH du même plan CD: donc BH est perpendi-
* N. 295. culaire à ce plan *.

301. *Eudoxe. Mais il s'agit de tirer une perpendiculaire sur un plan par un point donné dans le plan.*

Ariste.

Ariste. 1°. D'un point E pris à volonté hors du plan MN, j'abaisse une perpendiculaire EF sur le plan *. Fig. 200.

2°. Par le point donné B, je mene une parallele GB à la perpendiculaire EF; & GB est la perpendiculaire qu'il falloit tirer, puisque de deux paralleles, si l'une est perpendiculaire, l'autre l'est *. * N. 300. * N. 298.

PROPOSITION VI.

302. *La commune section de deux plans, ou la ligne commune aux deux plans qui se coupent, est une ligne droite.*

Soient F, G, deux points communs aux deux plans BC, DE; FG, ligne droite tirée de F en G, extrémités de la commune section. Je dis que la commune section est la droite FG. Fig. 201.

Si la commune section est, non la droite FG, mais la courbe FHG, ou FIG, le plan BC ou DE est plan, par l'hypothèse, sans

l'être en effet, puisqu'une de ses lignes FHG, ou FIG s'écartant de la droite, empêchera qu'une ligne droite tournant sur le plan immédiatement ne la touche également partout & sans obstacle *.

*N. 90.

Si l'on veut que la droite tirée de F en G dans le plan BC soit, non FG, mais FHG, & que la droite tirée de F en G dans le plan DE soit, non FG, mais FIG; les deux droites enfermeront un espace FIGHI, ce qui ne se peut *.

*N. 92.

PROPOSITION. VII.

303. *On ne tire par un point qu'une perpendiculaire au plan.*

Soit AB perpendiculaire sur CD; je dis que BE ne l'est pas.

Fig. 202.

Si BE est perpendiculaire comme AB, & que BF soit la commune section du plan CD & du plan BEF = ABE; l'angle EBF sera droit comme ABF, ce qui est impossible, puisque EBF n'est qu'une partie de ABF.

Par la même raiſon, du même point E, l'on ne tirera qu'une perpendiculaire EF ſur le plan : car ſi EB l'étoit auſſi, l'angle EBF ſeroit droit comme EFB, ce qui ne ſe peut*. *N. 122.

PROPOSITION VIII.

304. *Si la même ligne eſt perpendiculaire ſur deux plans, ils ſont paralleles.*

Soit BC perpendiculaire aux deux plans *x*, *z* : je dis que *x*, *z* ſont paralleles. Fig. 203.

BC, perpendiculaire ſur les deux plans *x*, *z*, l'eſt à une ligne quelconque BD, ou CE paſſant par les points de ſection B, C : donc toutes les lignes correſpondantes qui paſſent par les points B, C, ſont perpendiculaires ſur BC, & par conſéquent paralleles entr'elles* : or elles ſont les deux plans** : donc ils ſont paralleles. *N. 44. ** N. 90.

Par la même raiſon, ſi une ligne eſt perpendiculaire ſur trois

plans, ils feront paralleles, une ligne perpendiculaire fur l'un, le fera fur les autres.

PROPOSITION IX.

Fig. 204. 305. *Deux lignes* GH, IH, *qui fe rencontrent dans un plan, & fe continuent, ne font pas une feule ligne droite continuée* IK; *mais après s'être rencontrées, elles fe féparent.*

Du point de rencontre H, intervalle IH, décrivez un cercle ILM:

Si les droites GH & IH fe continuent en ligne droite commune HK; les droites GHK & IHK, paffant par le centre H, feront deux diamétres *: donc le fegment GLKH fera demi-cercle, auffi-bien que ILKH: donc la partie GLKH fera égale au tout ILKH, ce qui eft abfurde.

*N. 55.

Ainfi, GH & IH fe fépareront comme HK, HN.

Par le même principe, deux

lignes droites quelconques venant à se rencontrer, se coupent sans faire une ligne droite commune & continuée.

PROPOSITION X.

306. *Une ligne droite* BC *tirée dans un plan parallelement au plan, n'a point une partie hors du plan.* Fig. 205.

Elle seroit parallele sans l'être * puisqu'elle s'écarteroit dans un point. *N. 40.

Aussi, Soit BC, droite tirée dans le plan DE parallelement au plan :

Je dis que CF supposée hors du plan, n'est point une partie de la droite BC continuée.

Tirez dans le plan la ligne CG perpendiculaire à BC, & CH perpendiculaire CG.

Les angles BCG, GCH sont droits *, étant faits par des perpendiculaires : donc BC & CH sont même ligne, puisque la même li- *N. 95.

gne BH coupée par une perpendiculaire CG fait deux angles droits. Donc CF qui est hors du plan, n'est pas une partie de BC, ou BC continuée. Autrement, deux lignes droites FC, HC, se continueroient en ligne droite commune sans se séparer après s'être rencon-
* N. trées ; ce qui n'est pas possible *.
305.

PROPOSITION XI.

307. *Si un plan* GF *coupe deux*
Fig. *plans paralleles* AB, CD, *les com-*
206. *munes sections* EF, GH *sont paralleles.*

Autrement, prolongées en L, elles se rencontreroient, & par conséquent les plans AB, CD dans lesquels elles sont, & dont elles
* N. ne peuvent sortir *, se rencontre-
306. roient aussi ; ce qui ne se peut * ; ou les plans seroient paralleles par l'hypothèse, & inclinés réellement
* N. puisqu'ils iroient se joindre *.
299.

PROPOSITION XII.

308. *Les plans semblables sont*

comme les quarrés de leurs côtés.

Ces plans ſont Triangles, quadrilateres, ou Poligones ſemblables : or ces figures ſemblables ſont comme les quarrés de leurs côtés *.

* N. 257.

Et les plans multipliés nous donneront enfin les ſolides.

EUDOXE. Matiére qui me fera d'autant plus de plaiſir, qu'elle ſera le ſujet de plus d'un Entretien.

XIV. ENTRETIEN.

Sur les Priſmes & les Cylindres.

ARISTE. NOus voilà parvenus inſenſiblement, Eudoxe, & par dégrés aux vérités les plus compoſées de la Géométrie.

EUDOXE. Et vous allez ſans doute les developer à votre ordi-

naire en Propositions naissantes les unes des autres. Mais de grace, Ariste, par quel secret vous remetrez-vous dans l'esprit avec ordre tant de vérités assez compliquées & assez embarrassantes?

ARISTE. Vous voyez cette suite de figures Géométriques: parlant à mes yeux, elles me rappelleront dans le même ordre des vérités que je ne ferai que vous rappeller.

EUDOXE. J'ai le loisir de vous entendre; & vous ne sçauriez commencer trop tôt, ni finir trop tard.

309. *ARISTE.* Le solide ou le corps est une portion d'étendue considérée comme longue, large & profonde.

Le Prisme.

310. C'est un solide compris entre plusieurs plans, dont deux qu'on nomme bases, sont opposés,

sés, paralleles entr'eux, semblables, égaux; & les autres Parallelogrames.

311. Si les deux plans A, B, opposés, paralleles, semblables & égaux d'un Prisme, sont triangulaires, c'est un Prisme triangulaire. Fig. 207.

312. L'axe du Prisme est la ligne droite qui va du milieu d'un plan au milieu du plan parallele. Si le Prisme est droit, l'axe en est la hauteur.

La hauteur d'un Prisme incliné a pour mesure la perpendiculaire tirée du plan supérieur sur la base prolongée.

313. Deux Prismes sont semblables, quand ils sont terminés par même nombre de plans semblables *. Les Prismes sont semblables & égaux, s'ils sont terminés par même nombre de plans semblables & égaux. * N. 293.

314. Le Parallelepipede IK Fig. 208.

eſt un Priſme terminé par ſix Parallelogrames opposés deux à deux, paralleles, ſemblables, égaux. Ainſi, ſa baſe eſt un Parallelograme.

Fig. 209. 315. Le cube LM eſt un Parallelepipede qui a ſix plans opposés deux à deux, paralleles, égaux, quarrés.

Cela ſupposé.

PROPOSITION I.

316. *Le Priſme eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur.*

Puiſque les deux baſes ſont égales, ſemblables, paralleles, & que les autres côtés ſont Parallelogrames *; les plans paralleles à chaque baſe & intermediaires qui composent le Priſme avec la baſe, ſont tous ſemblables & égaux à la baſe.

* N. 310.

Ainſi prenez la baſe autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur perpendiculaire : vous avez

le Prisme : donc le Prisme est le produit de sa base par sa hauteur.

Et par conséquent, c'est le produit de sa hauteur par sa base (*a*).

317. De-là, 1°. Toute section d'un Prisme faite parallelement à la base est semblable & égale à la base, puisqu'il est formé par le mouvement parallele de la base *. * N. 316.

318. 2°. Deux Prismes de même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs ; ou de même hauteur, comme leurs bases, les produits par même multiplicateur étant comme les grandeurs multipliées (*b*).

319. 3°. Les Prismes de même base & de même hauteur, droits, ou inclinés, sont égaux, puisqu'ils sont comme leurs hauteurs, ou leurs bases.

EUDOXE. Mais le Prisme oblique est plus long que le droit de mê-

(*a*) Calcul Littéral, N. 13.
(*b*) Ibid. N. 147.

me hauteur & de même base....?

ARISTE. Oui : mais le parallelograme oblique est plus long que le droit de même hauteur & de
* N. 182. même base : en est-il plus grand *?

Le parallelograme est moins large à proportion, & le Prisme oblique, moins gros.

PROPOSITION II.

320. *Un Prisme en vaut plusieurs de même hauteur, lorsque sa base vaut leurs bases prises ensemble.*

1°. Il y a dans chacun de ces Prismes nombre égal de plans paralleles, puisqu'il y a même hauteur.

2°. Chaque plan du plus grand Prisme vaut tous les plans correspondants des autres, étant à ces plans pris ensemble, comme sa base à leurs bases, prises ensem-
* N. 318. ble *.

PROPOSITION III.

321. *Le Prisme poligone peut se réduire en autant de Prismes triangulaires qu'il a de côtés.* Fig. 210.

Réduisez les bases Poligones ABCDE, KFGHI du Prisme poligone z, en autant de Triangles qu'elles ont de côtés *: ces Triangles sont bases d'autant de Prismes triangulaires *. * N. 234. * N. 311.

Donc le Prisme poligone peut se réduire en autant de Prismes triangulaires qu'il a de côtés.

322. L'on peut dire des Parallelepipedes, qui sont des Prismes, ce qu'on a dit des Prismes mêmes *. * N. 314.

Ainsi, 1°. Le Parallelepipede est le produit de sa base par sa hauteur *. * N. 316.

2°. Toute section du Parallelepipede faite parallelement à sa base, est égale & semblable à sa base *. * N. 317.

3°. Les Parallelepipedes de même hauteur sont comme leurs ba-
* N. ses *, ou de même base, comme
318. leurs hauteurs, &c.

Fig. *Eudoxe. Cela va vous donner la*
211. *solidité d'un Parallelepipede.*

323. *Ariste.* 1°. Je multiplie la longueur AC par la largeur
* N. AB ; & j'ai la base CB *.
286. 2°. Je multiplie la base par la hauteur AH ; & j'ai la solidité CF, qui est le produit de la base
* N. par la hauteur *.
322.

PROPOSITION IV.

Fig. 324. *Les Parallelepipedes* CF,
211. MO, *sont entr'eux en raison composée de celles de leurs trois dimensions, longueur, largeur, hauteur.*

Les produits de trois dimensions sont en raison composée des raisons de leurs dimensions (*a*) : or les Parallelepipedes sont les produits de leurs trois dimensions,
* N. longueur, largeur, hauteur *.
322 & 323.

(*a*) Calcul Littéral, N. 181.

Aussi, 1°. Dans la comparaison des deux Parallelepipedes CF, MO, il y a raisons de longueur AC à longueur IM; de largeur AB à largeur IK; de hauteur AH à hauteur IQ.

2°. Multipliant AC par AB, vous avez la base CB, & multipliant la base CB par AH, vous avez le solide CF *. * N. 323.

Ainsi, CF est le produit des antécédens AC, AB, AH.

Par le même principe, MO est le produit des conséquens IM, IK, IQ.

Or la raison du produit des antécédens & du produit des conséquens de trois raisons, est une raison composée de ces trois raisons (a).

PROPOSITION V.

325. *Deux Parallelepipedes semblables sont en raison triplée.*

La raison de ces deux solides est

(a) Calcul Littéral, N. 177.

* N. 313. composée de trois raisons égales *, puisque les Parallelepipedes semblables sont ceux dont les côtés sont proportionnels, ou dont les trois dimensions ont raisons égales : donc elle est triplée (*a*).

326. Ainsi les Parallelepipedes semblables sont comme les cubes des exposans de leurs côtés homologues (*b*).

327. EUDOXE. *S'il faut trouver la raison de deux Parallelepipedes semblables....*

ARISTE. 1°. Comparant les trois côtés de l'un avec les trois côtés de l'autre, j'observe les raisons des exposans.

2°. Multipliant les antécédens de ces raisons par les antécédens, & les conséquens par les conséquens, j'ai dans la raison des produits ou des cubes, celle des deux solides, puisqu'ils sont com-

(*a*) Calcul Littéral, N. 170.
(*b*) Ibid. N. 182.

me les cubes des exposans de leurs côtés *. * N. 326.

Une dimension est-elle double d'une dimension, la longueur de la longueur? la raison des exposans est 2. 1; & comme les trois raisons sont égales * en triplant 2. 1, j'ai 2. 1; 2. 1; 2. 1: enfin, je cube les antécédens, puis les conséquens; & la raison des cubes 8, 1 est la raison des deux Parallelepipedes; c'est à-dire, que l'un vaut huit fois l'autre. * N. 325.

PROPOSITION VI.

328. *Si trois lignes* B, C, D, *sont proportionnelles, un Parallelepipede* EF *fait des trois lignes, sera égal à un Parallelepipede équiangle* GH *qui aura ses côtes égaux à la ligne du milieu.* Fig. 212.

Soient donc le Parallelepipede EF fait de IF = B; de EK = C, & de IK = D; GH ayant ses trois côtés HL, LM, MG égaux à C.

Si EF, GH sont inclinés, je

tire les perpendiculaires KN, MO, qui sont égales : car les angles KEP, MGQ étant égaux, puisque les solides sont équiangles ; les Triangles ENK, GOM ont les angles ou supplemens
* N. 97. KEN, MGO égaux*, aussi-bien que les angles N, O droits, avec un côté égal, & sont par consé-
* N. 137. quent égaux*.

Cela posé ; je dis que GH = EF.

1°. Le plan MH, Parallelograme fait sur HL = LM = C est égal à KF, Parallelograme équiangle fait de IF = B, puisque les Parallelogrames équiangles sont entr'eux comme les produits de
* N. 186. leurs côtés *, & qu'ici ces côtés étant en proportion continue par l'hypothèse, HL × HL = IF × IK : donc les bases sont égales.

2°. Les hauteurs KN, MO sont égales aussi.

Or les Parallelepipedes de mê-

me base & de même hauteur sont égaux* : donc EF = GH. * N. 322.

PROBLÉME VII.

329. *Si quatre lignes sont proportionnelles, les Parallelepipedes semblables faits sur ces lignes sont proportionnels.*

Si les quatre lignes sont proportionnelles, leurs cubes le sont : or les Parallelepipedes semblables sont comme les cubes de leurs côtés*: * N. 326.

PROPOSITION VIII.

330. *Dans les Parallelepipedes égaux* BC, DE, *les bases* BG, DH, *& les hauteurs* DF, BK, *sont réciproques.* Fig. 233.

Soient la hauteur DL = BK, & la base DH = LM.

Je dis que la base de BC est à la base de DE, comme la hauteur de DE à la hauteur de BC, ou que BG. DH : : DF. BK.

BC. DM : : BG. DH, les Parallelepipedes de même hauteur

étant comme leurs bases *: donc DE = BC. DM :: BG. DH.

Or DE. DM :: DF. DL, les Parallelepipedes de même base étant comme leurs hauteurs.

Et DF. DL :: DF. BK = DL.

Donc BG. DH :: DF. BK.

PROPOSITION IX.

Fig. 214. 331. *Si l'on coupe un Parallelepipede par un plan selon la diagonale* AB, *on le partage en deux Prismes triangulaires égaux.*

1°. Les deux parties sont Prismes triangulaires *, puisque chacun a deux bases ABE, CDG, ou ABF, CDH, planes, paralleles, semblables, égales, triangulaires, ou moitiés de parallelogrames coupés suivant la diagonale *.

* N. 310.
* N. 181.

2°. Ces deux Prismes sont égaux, ayant même base & même hauteur *.

* N. 322.

PROPOSITION X.

332. *Les Prismes triangulaires*

semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Ces Prismes sont comme les Parallelepipedes dont ils sont moitiés *, puisque les moitiés sont * N.
comme les touts: Or les paralleli- 331.
pipedes semblables sont comme les cubes de leurs côtés *. * N.

333. De-là, en général, les 326.
Prismes semblables, Pentagonaux ou éxagonaux, &c. sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés: car ces Prismes peuvent se réduire en Prismes triangulaires sembla-
bles * qui sont comme les cubes de * N.
leurs côtés *; & les touts ou les 321.
parties prises ensemble, sont mê- * N. 332.
me chose.

Ce qu'on a dit des Prismes & des Parallelepipedes, convient aux cubes, qui sont des Parallele-
pipedes & des Prismes *. * N.

Enfin, dans deux Prismes 315 &
égaux, les bases seront récipro- 314.
ques aux hauteurs.

PROPOSITION XI.

Fig. 215. 334. *La surface d'un Prisme droit, sans y comprendre les bases, vaut un parallelograme de même hauteur, & dont la base est égale au circuit du Prisme.*

Les trois parallelogrammes, qui font la surface totale du Prisme triangulaire A, feroient, pris ensemble, le Parallelograme B, ayant même hauteur & même base *.

* N. 288.

Il en sera de même, par la même raison, de la surface de tout autre Prisme droit.

PROPOSITION XII.

Fig. 216. 335. *Enfin, la surface x d'un Prisme est double de celle du Poligone qu'il a pour base, si le Prisme a pour hauteur l'apothême du Poligone.*

Soient ABCEFA, Poligone di-

visé en autant de Triangles égaux qu'il a de côtés*, & que x comprend de Parallelogrames égaux*; HI = FE, base du Triangle EGF & du Parallelograme HE; GL = LM, apothéme du Poligone ou du Triangle EGF = HLI, & hauteur du Parallelograme HE.

* N. 234.
* N. 188.

Chaque Parallelograme est à un Triangle correspondant, comme HE est à EGF.

Il suffit donc de prouver que le Parallelograme HE est double du Triangle EGF = HLI.

Un Parallelograme est double d'un Triangle de même base & de même hauteur*: or le Parallelograme HE & le Triangle HLI = EGF ont même base HI & même hauteur LM, par l'hypothèse.

* N. 187.

Passerons-nous du Prisme au Cylindre?

Eudoxe. Oh! le Cylindre a

trop de rapport au Prisme pour les séparer.

ARISTE. En effet, ils se ressemblent par bien des endroits.

Le Cylindre.

336. C'est un solide qui a deux bases circulaires, égales & paralleles aux plans intermédiaires.

Et comme les cercles sont des Poligones réguliers & semblables
* N. 263. d'une infinité de côtés *, les côtés égaux & paralleles des cercles paralleles & égaux qui composent le Cylindre, font autour du Cylindre une infinité de Parallelo-
* N. 167. grames *.

337. Ainsi le Cylindre est un solide compris entre plusieurs plans, dont deux qui sont les bases, sont opposés, égaux entr'eux, paralleles, semblables; & les autres, Parallelogrames; & par conséquent le Cylindre est un Pris-
* N. 310. me d'une infinité de côtés *.

Puisque

Puisque le Cylindre est un Prisme, il en a les propriétés.

338. De-là, 1°. La ligne qui va du centre d'une base au centre de l'autre, est l'axe du Cylindre. Fig. 217.

L'axe AB est-il perpendiculaire à la base? C'est un Cylindre droit, dont la hauteur répond à l'axe AB. Si l'axe est incliné, c'est un Cylindre oblique dont la hauteur se mesure par la perpendiculaire CD qui descend du sommet sur un point hors du centre de la base.

339. 2°. Le Cylindre est le produit de sa base par sa hauteur, ou de sa hauteur par sa base *. * N. 316.

3°. Si l'on coupe un Cylindre parallelement à la base, la section est égale & semblable à la base *. * N. 317.

340. 4°. Les Cylindres de même base sont comme leurs hauteurs; de même hauteur, comme leurs bases *. * N. 319.

341. 5°. Les Cylindres sem-

blables, c'est-à-dire, dont la base est à la base, comme la hauteur à la hauteur, sont comme les cubes de
* N. exposans de leurs dimensions *.
333. 342. 6°. Un Cylindre en vaut plusieurs de même hauteur & dont les bases, prises ensemble, valent
* N. la sienne *.
330. 343. 7°. Coupez un Cylindre parallelement à la base : les segmens du Cylindre seront entr'eux comme les segmens de l'axe : car les segmens du Cylindre étant des
* N. Cylindres de bases égales *, ils
326. seront comme les hauteurs exprimées par les segmens de l'axe.

344. 8°. Un Cylindre vaut un Prisme triangulaire de même hauteur & de base égale, puisque les Prismes de même hauteur sont
* N. comme leurs bases *.
318. 345. 9°. La surface du Cylindre droit, comme celle du Prisme droit, est égale à un Parallelograme de même hauteur &

dont la base est égale au circuit de la base du Cylindre *.

346. 1°. Si la hauteur du Cy-
lindre est égale au rayon du cer-
le qui en est la base, la surface *N.
u Cylindre est double de ce cer- 334.
e, comme la surface du Pris-
e, qui a pour hauteur l'apothé-
e, ou le rayon droit de la base,
 double de celle de la base *.

347. *Eudoxe.* Aussi le cercle
i fait la base du Cylindre, est
 produit de la moitié de la cir- *N. 335.
nférence par le rayon *; & la
rface du Cylindre est le produit
e la circonférence entiere par
 rayon qui exprime la hauteur *N.
u Cylindre. 277.

Ariste. Ajouterai-je deux Pro-
ositions qui semblent naître de
 que vous venez dire ?

PROPOSITION I.

348. *Les surfaces de deux Cylin-
res droits sont en raison composée de*

celles de leurs hauteurs, & du contour de leurs bases.

Ces surfaces sont égales à deux Parallelogrames de même hauteur, chacun, que le Cylindre correspondant, & dont les bases sont égales aux circuits des bases cor-
* N. respondantes de ces Cylindres *:
345. or les Parallelogrames sont en raison composée de celles de leurs
* N. hauteurs, & de leurs bases *.
124. De-là, si la hauteur est à la hauteur, comme le circuit de la base au circuit; les surfaces sont en raison doublée de celle de la hauteur à la hauteur, ou du circuit
* N. au circuit *.
170.

PROBOSITION II.

349. *Dans deux Cylindres droits, si les bases sont égales, les surfaces seront comme les hauteurs.*

EUDOXE. Alors, les circuits des bases seront égaux. Ainsi, les surfaces seront comme deux rec-

tangles dont les bases seront égales à ces circuits : or les rectangles de bases égales sont comme leurs hauteurs *.

* N. 188.

Et je vois bien qu'il sera question des Pyramides & des Cônes dès que je pourrai me rendre ici.

XV. ENTRETIEN.

Sur les Pyramides & les Cônes.

EUDOXE. HE bien, Ariste, de quoi s'agit-il? Est-ce de Pyramide ou de Cône?

ARISTE. De l'un & de l'autre.

EUDOXE. C'est-à-dire, que nous allons creuser jusques dans le fond du Cylindre & du Prisme pour y découvrir les propriétés sécretes de la Pyramide & du Cône qui font parties de ces solides. La recherche est assez délicate & épineuse.

ARISTE. En allant pas à pas, on ne laisse pas d'avancer & d'approfondir.

EUDOXE. Allez donc; & je vous suis sans déranger le fil de vos Propositions.

350. *ARISTE.* D'abord, la Pyramide est un solide terminé par plusieurs plans triangulaires, qui ont un sommet commun & leurs bases dans le même plan BCD.

Si la base commune est triangulaire, c'est une Pyramide triangulaire ABCD, ayant trois plans triangulaires ABC, ACD, ABD sur cette base BDC, avec un sommet commun A. Si la base est un Poligone, c'est une Pyramide poligone.

Fig. 218.

La ligne qui descend du sommet au milieu de la base, est l'axe de la Pyramide.

Si l'axe est perpendiculaire à la base, la Pyramide est droite; s'il est oblique, elle est inclinée.

La hauteur de la Pyramide inclinée se mesure par la perpendiculaire qui descend du sommet sur un autre point que le milieu de la base, ou sur la base prolongée.

351. Les Pyramides semblables sont celles qui sont terminées par même nombre de plans semblables.

PROPOSITION I.

352. *Un plan angulaire, qui s'éleve parallelement à lui-même & diminue également à mesure qu'il s'éleve, décrit une pyramide.*

Ce plan décrit un amas de plans angulaires & paralleles qui décroissent également à mesure qu'ils sont plus élevés. Or cet amas de plans angulaires est une Pyramide *, puisque leurs côtés qui diminuent également, sont étant ajoutés parallement les uns * N. 350.

aux autres, les plans angulaires qui terminent le solide, ayant un sommet commun, & leurs bases dans le même plan.

PROPOSITION II.

353. *La section d'une Pyramide parallelement à la base, est semblable à la base.*

Les plans paralleles dont la Pyramide est faite *, sont semblables à la base, puisque la Pyramide est la base même, diminuant toujours de grandeur également sans changer de figure. Or la section parallele à la base est un de ces plans.

* N. 352.

Fig. 219. Aussi, dans la Pyramide *p*, le plan triangulaire NLI parallele à la base BCD, est semblable à cette base : car si un plan coupe deux plans paralleles, les sections sont paralleles *. Ainsi les lignes LI & CD, IN & DB, NL & BC sont paralleles ; & par consequent le

* N. 307.

le Triangle NLI est semblable au Triangle BCD, ayant mêmes angles.

Par la même raison, le plan KMO sera semblable à la base FGH.

De-là, 1°. La Pyramide a autant de côtés que la base. 2°. Les Pyramides semblables ont pour bases des plans semblables.

PROPOSITION III.

354. *La Pyramide poligone se réduit en Pyramid s triangulaires.*

Sa base est un Poligone *, qui se réduit en Triangles * : or sur ces Triangles, élevez des plans paralleles, figurés de même, & diminuant également jusqu'au sommet : ce seront des Pyramides triangulaires *.

Ainsi, la Pyramide poligone vaut plusieurs Pyramides triangulaires de même hauteur & dont

* *N.* 350. * *N.* 234. * *N.* 350 & 352.

les bases, prises ensemble, valent la sienne.

PROPOSITION IV.

355. *Deux Pyramides triangulaires de même hauteur, sont comme leurs bases.*

Toutes les sections ou tranches paralleles à la base, sont semblables à la base *.

* N. 353.

Ainsi, les tranches d'une Pyramide sont aux tranches correspondantes de l'autre, comme la base à la base. Or chaque Pyramide ayant même hauteur, n'est qu'un nombre égal de ces tranches : donc l'une est à l'autre, comme la base à la base.

Fig. 219. Aussi, soient P, Q, deux Pyramides triangulaires ; l'une perpendiculaire P, l'autre inclinée Q, ayant même hauteur ER, & par conséquent même nombre de Triangles ; ES=AI, ET=AD ;

SXK parallele à TRF; NLI, KMO, deux tranches ou plans triangulaires à même hauteur & paralleles aux bases BCD, FGH.

Je dis que P.Q : : BCD.FGH.

1°. Les Triangles NLI & BCD, KMO & FGH sont semblables *, ainsi que ALI & ACD, ESX & ETR, EXK & ERF, EKM & EFG *. * N. 353. * N. 133.

2°. Les Triangles semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues *, & si les racines sont proportionnelles les puissances le sont (*a*). Cela posé; le Triangle NLI.BCD : : $LI^2.CD^2$: : $AI^2.AD^2$: : $ES^2.ET^2$: : $EX^2.ER^2$: : $EK^2.EF^2$: : $KM^2.FG^2$: : KMO.FGH. * N. 197.

Mais deux raisons égales à une troisième, sont égales entr'elles (*b*).

(*a*) Calcul Littéral, N. 185.

(*b*) Ibid. N. 104.

Donc NLI. BCD :: KMO. FGH (a).

Donc par la même raiſon, chaque tranche triangulaire de P, eſt à chaque tranche correſpondante de Q, comme la baſe BCD à la baſe FGH; & par conſéquent l'aſſemblage total des tranches de P eſt à celui de Q, comme BCD à FGH, ou P. Q :: BCD. FGH.

356. De-là, 1°. Les baſes des Pyramides ſemblables ſont comme les quarrés de leurs côtés homologues : car ces baſes ſont
* N. Triangles ou plans ſemblables*,
351. & les plans ſemblables ſont comme les quarrés de leurs côtés ho-
* N. mologues *.
308.

357. 2°. Les Pyramides de même hauteur ſont comme leurs
* N. baſes : car les Pyramides poligo-
354. nes ſe réduiſent en triangulaires * :
* N. or les triangulaires de même hau-
355. teur ſont comme leurs baſes *.

(a) Calcul Littéral, N. 144.

358. 3°. Les Pyramides de même hauteur & de même base sont égales, puisque de même hauteur elles sont comme leurs bases*. * N. 357.

PROPOSITION V.

359. *Le Prisme triangulaire, x, se réduit en trois Pyramides triangulaires égales.* Fig. 220.

Divisez les trois rectangles AE, EC, AF, par trois diagonales BD, BF, CD : il se forme trois Pyramides triangulaires ABCD, DBFE, FDCB.

Or, 1°. ABCD = DBFE, ayant base égale, sçavoir le Triangle ABC = DEF, & égale hauteur, sçavoir le côté AD = EB*. * N. 310.

2°. FDCB = ABCD, ayant base égale, sçavoir le Triangle FDC = ADC, autre moitié du rectangle CD*, & égale hauteur, sçavoir, GB, hauteur commune. * N. 181.

Mais si deux grandeurs sont égales à une troisième, les trois

ſont égales : donc ABCD = DBFE = FDCB.

Donc le Priſme triangulaire ſe réduit en trois Pyramides triangulaires égales.

Ainſi, la Pyramide triangulaire eſt le tiers d'un Priſme triangulaire.

360. De-là, 1°. La Pyramide poligone eſt le tiers d'un Priſme poligone de baſe égale & de même hauteur.

Car la Pyramide poligone ſe ré-
* N duit en Pyramides triangulaires *,
354. & le Priſme poligone en Priſmes
* N. triangulaires * : or chacune de ces
321. Pyramides triangulaires eſt le tiers
d'un de ces Priſmes triangulai-
* N. res * : donc les Pyramides, priſes
359. enſemble, ſont le tiers des Priſmes, pris de même : mais ces Pyramides ſont la Pyramide poligone ; & ces Priſmes, le Priſme : donc la Pyramide poligone eſt le tiers du Priſme poligone de baſe

égale & de même hauteur.

361. 2°. Les Pyramides de même base sont comme leurs hauteurs.

Car les tiers des Prismes sont comme les Prismes dont ils sont les tiers : ainsi les Pyramides étant les tiers des Prismes de même base & de même hauteur*, sont comme ces Prismes. * N. 360.

Or les Prismes de même base sont comme leurs hauteurs *. * N. 318.

362. 3°. Les Pyramides semblables sont entr'elles comme les cubes de leurs côtés homologues, puisque les Prismes semblables, dont elles sont les tiers, sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues *. * N. 333.

D'ailleurs, les Pyramides semblables sont comme les Prismes triangulaires qui les donnent *, * N. 359. ou qu'elles donnent *, & ces Prismes * N. 354. étant moitié des Parallelepipedes semblables *, sont, com- * N. 331.

me eux, en raiſon triplée de celle
* N. 325. de leur hauteur *.

363. EUDOXE. *Mais s'il falloit meſurer la ſolidité d'une Pyramide, comment vous y prendriez-vous ?*

ARISTE. Je multiplierois la baſe par le tiers de la hauteur.

La baſe multipliée par la hauteur donneroit un Priſme de même
* N 316. baſe & de même hauteur * : donc la baſe multipliée par le tiers de la hauteur, donnant le tiers du Priſme, donneroit la Pyramide
* N. 359. qui en eſt le tiers *.

Meſurons la ſurface.

PROPOSITION VI.

364. *La ſurface d'une Pyramide droite, vaut un Triangle de hauteur égale à la hauteur de chacune de ſes faces, & de baſe égale au circuit de la baſe de la Pyramide.*

Cette ſurface eſt compoſée de pluſieurs faces qui ſont autant de

Triangles de même hauteur *. * N. 350.
Or ces Triangles, pris ensemble, valent un Triangle de même hauteur & de base égale aux bases, prises ensemble, de ces Triangle *, c'est-à-dire, au circuit de la base de la Pyramide. * N. 190.

De-là, cette surface est moitié d'un Parallelograme de même hauteur qu'elle, & de même base; & par conséquent égale à un Parallelograme de même hauteur & de base moitié plus petite *. * N. 189.

EUDOXE. Mais pourquoi ne faites-vous pas la surface de la Pyramide droite moitié d'un Parallelograme de même hauteur que la Pyramide même?

ARISTE. Comme les faces de la Pyramide sont des Triangles *, la hauteur de chaque face est, non la hauteur de la Pyramide même, mais la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base de la face *. * N. 350. * N. 182.

Ainsi la hauteur de la surface de la Pyramide a pour mesure, non la perpendiculaire qui descend du sommet sur la base de la Pyramide, mais la perpendiculaire tirée du sommet sur la base de la surface même.

EUDOXE. Apparemment la Pyramide nous conduit au Cône.

ARISTE. C'est à peu près la même chose.

Le Cône.

Fig. 221. 365. C'est un Solide ABCDE fait du cercle BCDE, qui va toujours parallelement à lui-même, mais en diminuant également jusqu'à ce que la Figure se termine en pointe A.

366. Ainsi, comme le cercle est un Poligone d'une infinité de côtés *, & que chaque côté qui va toujours en diminuant parallelement à lui-même fait un Triangle ; le Cône est un Solide termi-

* N. 263.

né par une infinité de plans triangulaires ; & par conséquent le Cône est une Pyramide d'une infinité de côtés *. * N. 350.

Aussi plus la Pyramide a de côtés, plus elle approche du Cône : donc une Pyramide d'une infinité de côtés ne différe pas du Cône.

Puisque le Cône est Pyramide, il en a les propriétés.

367. De-là, 1°. La ligne AF qui descend de la pointe du Cône au milieu de la base, est l'axe. L'axe est-il perpendiculaire à la base ? C'est un Cône droit, & l'axe en mesure la hauteur. Si l'axe est incliné, c'est un Cône oblique. La hauteur du Cône incliné est la perpendiculaire qui descend sur un autre point que le milieu de la base.

368. 2°. La hauteur de la surface du Cône est la ligne droite tirée du sommet à la base de la surface *. * N. 364.

369. 3°. La section d'un Cône faite parallelement à la base est
* N. semblable à la base *.
353. 370. 4°. Un Cône est le tiers d'un Cylindre de même base & de même hauteur : car le Cône
* N. 366. est une Pyramide * ; & le Cylin-
* N. dre, un Prisme * : or la Pyrami-
337. de est le tiers d'un Prisme de même base & de même hauteur, &
* N. par conséquent d'un Cylindre *.
360. 371. 5°. Un Cône en vaut plusieurs de même hauteur, & dont les bases prises ensemble, valent
* N. la sienne *.
354. 372. 6°. Les Cônes de même base sont comme leurs hauteurs ; de même hauteur, comme leurs
* N. bases *.
361. 7°. Les Cônes semblables, ou dont la base est à la base, comme la hauteur à la hauteur, sont en raison triplée, ou comme les cu-
* N. bes de leurs côtés *.
365. Mesurons les surfaces en détail.

PROPOSITION I.

373. *La surface du Cône droit vaut un Triangle rectangle de même hauteur que la surface du Cône, & dont la base est égale au circuit de la base du Cône.*

Telle est la valeur de la surface de la Pyramide *, & par conséquent de la surface du Cône *. * N. 364. * N. 366.

374. De-là, 1°. La surface du Cône droit vaut un Rectangle de même hauteur qu'elle, & dont la base est moitié du circuit de celle du Cône, puisque cette surface vaut un Triangle *, qui est égal à ce Rectangle *. * N. 373. * N. 189.

375. 2°. Les surfaces de deux Cônes sont en raison composée de celles de leurs bases & de leurs hauteurs : car ces surfaces sont comme deux Rectangles*; & les Rectangles sont en raison composée de celles de leurs bases & de leurs côtés *. * N. 374. * N. 194.

376. Si deux Cônes ont les surfaces semblables, elles seront en raison doublée de celle de leurs bases ou de leurs hauteurs, com-
* N. 198. me les Rectangles *.

377. Si les surfaces sont de même hauteur, elles seront comme leurs bases ; de même base, comme leurs hauteurs ; de même base & de même hauteur, égales,
* N. 188. ainsi que les Rectangles *.

PROPOSITION II.

378. Si les surfaces de deux Cônes sont de même hauteur, elles sont entr'elles comme les diamétres de leurs bases.

De même hauteur, elle sont
* N. 377. comme leurs bases *, qui sont cir-
* N. 365. conférences * : or les circonfé-
rences sont comme leurs diamé-
* N. 265. tres *.

PROPOSITION III.

379. La surface du Cône est à la

surface du cercle qui en est la base, comme la hauteur de la surface du Cône est au rayon du cercle.

Soient A la surface d'un Cône; BC, la hauteur de la surface; CDEF le circuit du cercle N, ou de la base; NC, le rayon; H côté = BC; I côté = CDEF; G, Triangle rectangle; L, côté = NC; M, côté = CDEF; K, Triangle rectangle. Fig. 222.

1°. Le Triangle rectangle G vaut la surface A *, de même base & de même hauteur, par la construction. * N. 373.

2°. Le Triangle K, vaut le cercle N * ayant pour base la circonférence & pour hauteur le rayon. Fig. 275.

Cela supposé; il suffit de prouver que le Triangle G est au Triangle K, comme le côté H au côté L; en un mot, que G. K : : H. L.

Or la base I = M, par la construction, & les Triangles de même base sont comme leurs hau-

* N. teurs* : donc G. K : : H. L.
188. N'en est-ce pas assez, Eudoxe, pour l'intelligence de la Sphere ?

EUDOXE. Nous en ferons l'essai dès demain.

XVI. ENTRETIEN.

Sur la Sphére.

EUDOXE. IL s'agit donc, Ariste, de mesurer des Globes ?

ARISTE. Le Globe même de la Terre : car, Eudoxe, si vous avez la patience de m'accompagner, allant de Propositions en Propositions, nous pénétrerons jusqu'au centre de la Terre pour en mesurer également la surface & la solidité ; peut-être irons-nous jusques à mesurer la grandeur du Soleil.

EUDOXE. Ne verrois-je pas volontiers tout ce qui conduit à des

des vérités si sublimes ?

Dévelopez la suite de vos idées ; & vous me trouverez docile & attentif.

Ariste. Nous commencerons donc par définir.

Définitions.

380. La Sphére ABCDA est un solide borné de tous côtés par une surface dont tous les points sont également éloignés d'un point intérieur E, qui est le centre de la Sphére. Fig. 223.

381. Ainsi, le centre de la Sphére est également éloigné de tous les points de la surface.

De-là, toutes les lignes EB, ED, &c. tirées du centre à la surface sont égales.

382. Le diamétre BED de la Sphére est une ligne droite, qui va d'un point de la surface par le centre au point opposé ; & le rayon EB de la Sphére est un

demi-diamétre. Et par conséquent tous les rayons, aussi-bien que les diamétres de la même Sphére, sont égaux ; & elle a autant de diamétres que de lignes droites qui traversent le centre.

383. La révolution d'un demi-cercle autour d'un diamétre AEC donne la Sphére ; & ce diamétre est l'axe de la Sphére ; & comme elle peut être formée par la révolution d'un demi-cercle tournant autour d'un diamétre quelconque, tout diamétre peut être axe.

384. Le demi-cercle est composé de Sinus perpendiculaires à l'axe, & dans la révolution du demi-cercle chaque Sinus FG décrit un cercle FGH parallele au grand cercle BED de la Sphére.

De-là, les grands cercles & les petits cercles de la Sphére ; les grands cercles, qui ont pour rayon, le rayon même de la Spére, & passent par le centre ; les

petits cercles, qui ont pour rayon un Sinus, plus petit que le rayon de la Sphére *. *N.66.

385. La Sphére est inscrite au Cylindre, quand le Cylindre a pour base le grand cercle & pour hauteur le diamétre de la Sphére.

La moitié de la Sphére est un Hémisphére.

Enfin deux Sphéres sont semblables, parce que les raisons des trois dimensions de l'une aux trois dimensions de l'autre sont égales*. * N. 382.

PROPOSITION I.

386. *La section d'une Sphere par un plan est un cercle.*

Je dis que le plan BFCHG, section d'une Sphére qui a pour centre le point E, est un cercle. Fig. 224.

Soient EG perpendiculaire tirée du centre E de la Sphére sur la section; EB, EC, &c. tirées du même centre E aux extrémités de la section.

1°. EB, EC, &c. font obliques, puisque d'un point l'on ne tire qu'une perpendiculaire sur un plan*; & GB, GC, &c. sont éloignemens du perpendicule.

*N. 303.

2°. EB, EC, &c. sont obliques égales, étant rayons de la même Sphére*, & la perpendiculaire EG est la même.

*N. 382.

Or les obliques égales appuyées sur même perpendiculaire, ont mêmes éloignemens du perpendicule*.

*N. 37.

Donc GB, GC, &c. sont rayons égaux.

Toutes les obliques seront égales, & tous les éloignemens du perpendicule seront égaux, par la même raison.

Donc le plan BFCHG est un cercle.

PROPOSITION II.

387. *La demi-Sphere est égale aux*

deux tiers d'un cylindre de même base & de même hauteur.

Soient ABCD, Cylindre; BED, demi-Sphére; ABEDC, enveloppe; AFC, Cône de même base AC & de même hauteur EF que le Cylindre; GHI, plan parallele & égal à la base BFD, contenant trois cercles; le premier dans le Cylindre, & qui a pour rayon HG; le second, dans la demi-Sphére *, & qui a pour rayon HK; le troisième, dans le Cône, & qui a HL pour rayon; FKP, Triangle rectangle, dont l'hypothénuse FK = HG; le côté FP = HK, le côté PK = LR = FH perpendiculaires entre mêmes paralleles *; LH = FH = KP, puisqu'un Parallelograme sur la diagonale d'un Quarré & qui a un angle commun, est un Quarré *; GK = SI, Couronne de l'enveloppe, & qui répond au cercle LMNO du Cône.

Fig. 225.

* N. 386.

* N. 401.

* N. 215.

La demi-Sphére BED = AB-CD—ABEDC: donc ſi ABEDC eſt le tiers de ABCD, BED en ſera les deux tiers.

Par conſéquent il ſuffit de prouver que ABEDC eſt le tiers de ABCD, ou que ABEDC vaut le Cône AFC, tiers du Cylindre ABCD *.
* *N.* 370.

Si chaque Couronne de l'enveloppe ABEDC vaut un cercle correſpondant du Cône AFC composé de cercles paralleles *, l'enveloppe ABEDC vaut le Cône AFC, puiſque l'enveloppe & le Cône ont même baſe & même hauteur.
* *N.* 365.

Il reſte donc à démontrer que chaque Couronne vaut le cercle correſpondant du Cône, ou que GK + SI = LMNO.

Et je le démontre.

Du cercle qui a pour rayon FK, ôtez le cercle qui a pour rayon FP: reſte la valeur du cer-

cle qui a pour rayon PK = LH, puisque le cercle qui a pour rayon l'hypothénuse, vaut les deux cercles qui ont pour rayons les côtés *. * N. 273.

Or HG = FK; HK = FP; LH = PK: donc si du cercle qui a pour rayon HG, l'on ôte le cercle qui a pour rayon HK; le reste est la valeur du cercle qui a pour rayon LH, ou du cercle LMNO.

Mais enfin, ce qui reste est la Couronne GK + SI: donc GK + SI = LMNO.

De-là, si l'on multiplie le grand cercle BD de la demi-Sphére par les deux tiers du rayon FE, le produit sera la solidité de la demi-Sphére, puisqu'il est les deux tiers du Cylindre circonscrit.

PROPOSITION III.

388. *La Sphére vaut les deux tiers d'un Cylindre de même largeur & de même hauteur.*

La demi-Sphére vaut les deux tiers d'un Cylindre de même largeur & de même hauteur* : donc la Sphére vaut les deux tiers d'un Cylindre double du premier, ou qui a même largeur & même hauteur que la Sphére.

* N. 387.

Aussi, 1°. La Sphére inscrite BEDQ vaut le Cylindre ACFG, moins les deux Cônes AHF, CHG, opposés au sommet dans le centre H*.

Fig. 226.

* N. 387.

2°. Les Cônes AHF, CHG sont égaux, ayant même base AF = CG & même hauteur HE = HQ*.

* N. 372.

3°. Le Cône AQF = AHF + CHG, ou AQF = 2AHF, ayant même base AF, & double hauteur EH + HQ = EH, puisque les Cônes de même base sont comme leurs hauteurs*.

* Ibid.

Donc la Sphére BEDQ vaut le Cylindre ACFG, moins le Cône AQF.

Or

Or le Cône AQF eſt le tiers du Cylindre ACFG de même baſe & de même hauteur *. * N. 370.

Donc la Sphére BEDQ vaut le Cylindre ACFG, moins le tiers : donc elle en vaut les deux tiers.

Ainſi, 1°. Le Cylindre contient une fois & demi la Sphére inſcrite, & par conſéquent la raiſon du Cylindre à la Sphére inſcrite eſt *ſeſquialtère*.

2°. La Sphére eſt le produit de ſon grand cercle par les deux tiers du diamétre, puiſque ce produit vaut les deux tiers du Cylindre.

PROPOSITION IV.

389. *Une Sphère vaut une Pyramide, ou un Cône *, qui a pour baſe la Surface, & pour hauteur le rayon de la Sphére.* * N. 366.

La Sphere peut être regardée comme un Solide composé de Pyramides qui ayent pour hauteur le

rayon de la Sphére, leurs sommets au centre, & leurs bases à la Surface; car on peut considérer la Surface d'une Sphére comme composée d'une infinité de Poligones infiniment petits : or ces Pyramides prises ensemble, valent une Pyramide qui à pour hauteur le rayon & pour base la Surface de la Sphére *.

* N. 354.

390. De-là, 1°. Une Sphére vaut un Cône qui a pour base la surface, & pour hauteur la rayon de la Sphére, puisque le Cône est une Pyramide *.

* N. 366.

391. 2°. La Sphére est le tiers d'un Cylindre qui a pour hauteur le rayon & pour base la surface de la Sphére.

Car La Sphére vaut une Pyramide qui a pour hauteur le rayon & pour base la Surface de la Sphére *. Or cette Pyramide est le tiers d'un Prisme, qui ait même base qu'elle & même hauteur *, & par

* N. 389.

conséquent d'un Cylindre, qui est un Prisme *. * N. 360.

392. 3°. La Sphére vaut le produit de sa Surface par le tiers de son rayon : car la Sphére vaut une Pyramide ou un Cône qui a pour base la Surface de la Sphére & pour hauteur le rayon de la Sphére * : or multipliant cette base par le tiers de la hauteur, vous avez la Pyramide ou le Cône *. * N. 336. * N. 389. * N. 363.

PROPOSITION V.

393. *Deux Sphéres sont en raison triplée, ou comme les cubes des diamétres de leurs grands cercles.*

Les Cylindres semblables sont comme les cubes des diamétres qui représentent les dimensions de leurs bases égales aux cercles des Sphéres inscrites * : donc les deux Sphéres, qui étant semblables *, sont les deux tiers de ces Cylindres *, sont comme les cu- * N. 341. * N. 388.

bes des diamétres de leurs grands cercles, les parties semblables étant comme les touts.

D'ailleurs, deux Sphéres, qui sont deux solides semblables, valent deux Pyramides semblables qui ont pour hauteurs les rayons
* N. 389. des Sphéres*: or deux Pyramides semblables sont en raison tri-
* N. 362. plée de leurs hauteurs*: donc elles sont comme les cubes des rayons, & par conséquent des diamétres.

394. *Eudoxe. L'on vous donne deux Boules, dont l'une a le rayon double de l'autre: quelle est la raison des deux Boules?*

Ariste. Puisque le rayon est double du rayon, les exposans de la raison des rayons sont 2, 1; dont les cubes sont 8, 1.

Or les deux Boules sont entr'elles comme les cubes des expo-
* N. 393. sans des rayons*: donc elles sont entr'elles comme 8 à 1; c'est-à-

dire, que celle qui a le rayon double est octuple de l'autre.

Mesurons les Surfaces.

PROPOSITION VI.

395. *La Surface, x, de la demi-Sphère est égale à la Surface, z, du Cylindre de même base & de même hauteur.*

Soient ABF, quart de cercle inscrit dans le quarré ADBF, AF, rayon divisé en ses élémens AG, GK, &c. ANB, GOH, KPL, quarts de circonférences décrits du centre F; AD, GN, KO, RS, perpendiculaires sur le rayon AF. Fig. 227.

Que le quarré ADBF & le quart de cercle ANBF tournent sur l'axe BF: les perpendiculaires AD, GN, KO, &c. décriront des couches cylindriques qui feront le Cylindre ADEC, moins le Cône DFE de même base & de même hauteur, qui est le tiers du Cylindre *. Les quarts de cir- * N. 370.

conférence ANB, GOH, KPL, &c. décriront les couches sphériques ABC, GHI, KLM, &c. qui feront la demi-Sphére ABCF, & qui feront en même nombre que les couches cylindriques, puisque le nombre des unes & des autres sera mesuré par celui des points ou des élemens du rayon AF. Enfin les rayons AF, GF, KF, &c. décriront par leurs extrémités AG, GK, KR, des circonférences qui seront les bases des couches cylindriques & des couches sphériques.

Cela posé, 1°. A cause des Triangles semblables DAF, NGF, OKF, &c. * les hauteurs AD, GN, KO, &c. des couches cylindriques, sont entr'elles comme les rayons AF, GF, KF *; & les circonférences qui sont les bases de ces couches, sont aussi comme les rayons AF, GF, KF, qui les ont décrites *;

* N. 133.

* N. 250.

* N. 265.

donc les couches cylindriques sont en raison doublée de celles des rayons, ou comme les quarrés des rayons ou des circonférences (*a*).

2°. On peut réduire les couches sphériques en Triangles qui ayent pour bases des portions semblables dans les circonférences décrites par les rayons AF, GF, KF, & dont la hauteur soit exprimée par les quarts de circonférences ANB, GOH, &c.

Dans ces Triangles, les bases étant arcs semblables, seront comme les rayons AF, GF, KF *, & les côtés qui exprimeront les hauteurs, se trouvant égaux à des arcs ANB, GOH, KPL, qui sont aussi comme ces mêmes rayons, ces Triangles seront aussi en raison doublée des rayons : donc les couches sphériques composées de ces Triangles, seront en raison dou-

* N. 2.6.

(*a*) Calcul Littéral, N. 183.

blée des rayons, comme les couches cylindriques : donc les couches sphériques & les couches cylindriques sont proportionnelles *, les raisons égales à une troisième étant égales entr'elles : donc les cylindriques sont toutes plus grandes ou plus petites que les sphériques correspondantes, ou toutes égales.

* N. 104.

Or les cylindriques ne sont ni toutes plus grandes, ni toutes plus petites : autrement, les deux tiers AFD, CFE du cylindre vaudroient plus ou moins que la demi-Sphére ABCF de même base & de même hauteur; puisque toutes les couches cylindriques, prises ensemble, font le Cylindre ADEC moins le cône DFE, c'est-à-dire, les deux tiers du Cylindre ADEC, & que toutes les couches sphériques, prises ensemble, font la demi-Sphére ABCF, qui est aussi les deux tiers du même Cylindre.

ADEC : donc toutes les cylindriques ſont égales aux ſphériques correſpondantes : donc la première eſt égale à la première : donc la première couche cylindrique étant la Surface du Cylindre ; & la première couche ſphérique, la Surface de la demi-Sphére ; la Surface de la demi-Sphére eſt égale à la Surface du Cylindre de même baſe & de même hauteur.

De-là, la Surface de la Sphére eſt égale à celle du Cylindre de même baſe & de même hauteur.

PROPOSITION. VII.

396. *La Surface de la demi-Sphére eſt le produit de la circonférence du grand cercle qui en eſt la baſe, par le rayon.*

La Surface de la demi-Sphére vaut la Surface d'un Cylindre de même baſe & de même hauteur* : * N. 395.
or le produit de la circonférence du grand cercle de la demi-Sphé-

re par le rayon, est égal à la Surface d'un Cylindre de même base & de même hauteur; puisque la Surface du Cylindre est la circonférence de sa base, prise autant de fois qu'il y a de points dans l'axe
* N. égal au rayon *.

347. PROPOSITION VIII.

397. *La Surface de la demi-Sphére vaut deux fois l'aire de son grand cercle.*

Cette Surface vaut celle d'un Cylindre qui a pour base le grand
* N. cercle, & pour hauteur le rayon *:
395. or la Surface de ce Cylindre vaut
* N. deux fois l'aire de sa base *.

346. PROPOSITION IX.

398. *La Surface de la Sphére est quadruple de son grand cercle.*

La Surface de la Sphére est double de la Surface de la demi-Sphére: or la Surface de la demi-Sphére vaut deux fois celle de son grand

cercle *, donc la Surface de la Sphére est quadruple de son grand cercle.

* N. 397.

De-là, 1°. La Surface du Cylindre, étant égale à celle de la Sphére inscrite *, vaut quatre fois le grand cercle de la Sphére.

* N. 395.

2°. Comme les deux bases du Cylindre sont égales, chacune, au grand cercle de la Sphére, la Surface totale du Cylindre est à celle de la Sphére, comme 6 à 4, ou 3 à 2.

3°. La Surface d'une Sphére vaut un cercle dont le diamétre soit double du diamétre de la Sphére: car la Surface d'une Sphére est quadruple d'un cercle qui a pour diamétre celui de la Sphére*. Or un cercle qui a un diamétre double, est quadruple, puisque les cercles sont comme les quarrés des rayons, & par conséquent des diamétres *.

* N. 398.

* N. 272.

Eudoxe. Voulez-vous, Ari-

ſte, que nous eſſayons de trouver la Surface de la Sphére par une autre route ?

ARISTE. Je vous ſuis, Eudoxe, dans cette autre voye.

EUDOXE. Traçons une figure.

Fig. 228. Soient S, Sphére inſcrite au Cylindre ABCD; FP = CE, les deux tiers de la hauteur FG du Cylindre, c'eſt-à-dire, du diamétre de la Sphére S.

1°. Le Cylindre CEHD eſt les
* N. 339. deux tiers du Cylindre CABD *, puiſque FP eſt les deux tiers de FG. Ainſi la Sphére S eſt égale au
* N. 388. Cylindre CEHD *.

2°. La Sphére S vaut un Cône qui ait pour baſe la Surface & pour hauteur le rayon FS de la
* N. 389. Sphére S *.

D'ailleurs, ce Cône vaut un Cylindre IKLM qui ait pour baſe la baſe du Cône, ou la Surface de la Sphére, & pour hauteur le tiers
* N. 270. FN du rayon FS *, le Cône

étant le tiers d'un Cylindre de même base & de même hauteur.

Donc le Cylindre IKLM = CEHD = S.

3°. FP, qui est les deux tiers de la hauteur FG du Cylindre CABD, vaut le rayon FS, plus le tiers SP du rayon, & FN n'est que le tiers du rayon; par conséquent la hauteur FP du Cylindre CEHD est quadruple de la hauteur FN du Cylindre IKLM.

Or dans deux Cylindres égaux, mais de hauteurs inégales & de bases inégales; les bases sont réciproques aux hauteurs *. * N° 1324.

Donc la base du Cylindre IKLM est quadruple de la base du Cylindre CABD: donc la surface de la Sphére S, est quadruple de la base du Cylindre CABD, laquelle est égale au grand cercle de la Sphére S.

Ainsi la Surface de la Sphére est égale à un cercle qui ait pour

rayon le diamétre de la Sphére: car le cercle qui a pour rayon le diamétre de la Sphére est quadruple du grand cercle de la Sphére, les cercles qui ont un rayon double, étant quadruples *.

* N. 372. Enfin, la Surface de la Sphére inscrite au Cylindre est égale à la Surface du Cylindre, puisque la Surface du Cylindre est quadruple aussi de celle de la base: car lorsque la hauteur du Cylindre est égale au rayon de la base, la Surface du Cylindre est double de celle de la base *: donc la hauteur du Cylindre étant double du rayon, la Surface du Cylindre sera quadruple de celle de la base.

* N. 246.

Ariste. Cette maniére de mesurer la Surface d'une Sphére me paroît précise & nette.

399. *Eudoxe. Et je m'apperçois que nous touchons enfin à la mesure de la Surface de la Terre.*

Ariste. D'abord on convient

que la Terre eſt ronde, ou à peu près : auſſi de quelque côté que l'on aille, après 25 lieuës, l'on voit un nouveau dégré du Ciel, ou du grand cercle céleſte, où l'on ſe trouve. D'ailleurs, pluſieurs obſervations aſtronomiques donnent 9000 lieuës à la circonférence de ce grand cercle, ou 25 lieuës à chaque dégrés.

Suppoſant la Terre ronde, & la circonférence de ſon grand cercle de 9000 lieuës;

1°. Je prens la troiſième partie de la circonférence du grand cercle; & c'eſt le diamétre, à peu près*. * N. 281.

2°. Prenant la moitié du diamétre, j'ai le rayon*. * N. 55.

3°. Je multiplie la moitié de la circonférence par le rayon; & le produit eſt le grand cercle de la Terre*. * N. 277.

Enfin, j'aurai dans le quadruple de ce grand cercle la ſurface de Terre*. * N. 398.

Calculons, 1°. La circonférence du grand cercle supposée de 9000 lieuës, le diamétre est de 3000, environ: car le diamétre est la troisième partie de la circonférence, un peu moins *.

* N. 281.

2°. Le rayon, moitié du diamétre est donc de 1500 lieuës, un peu moins. Pour parler plus nettement, supposons-le de 1500 lieuës?

3°. Puisque la circonférence est de 9000 lieuës par l'hypothèse, la moitié est 4500: donc si l'on multiplie 4500 par 1500, valeur du rayon, le produit sera le grand cercle.

Quel est le produit de 4500 par 1500?.... 6750000: donc l'aire du grand cercle contient six millions, sept cens cinquante mille lieuës quarrées.

Donc la Surface de la Terre, valant quatre fois son grand cercle, vaut quatre fois 6750000 lieuës quarrées.

Or

Or quatre fois 6750000 font... 27000000.

Donc la Surface de la Terre contient environ 27 millions de lieuës quarrées.

400. *Déterminerons-nous la solidité même de la Terre?*

EUDOXE. Vous vous y êtes engagé, ce me semble.

ARISTE. Hé bien, connoissant le grand cercle de la Terre & son diamétre *, je multiplie le cercle par le diamétre; & j'ai un Cylindre de base égale au grand cercle de la Terre, & de même hauteur.

* N. 399.

2°. Je prens les deux tiers de ce Cylindre: & c'est la solidité de la Terre *, puisque la Sphére est les deux tiers d'un Cylindre qui a pour base le grand cercle de la Sphére, & même hauteur.

* N. 388.

Ainsi, comme l'aire du grand cercle est de 6750000 lieuës quarrées, & le diamétre de 3000 dans

l'hypotèse ; le produit de 6750000 par 3000 sera la solidité du Cylindre. Quel est ce produit ? . . . . . 20 milliards, deux cens cinquante millions.

Donc la Terre qui est les deux
* N. [illegible]8. tiers de ce Cylindre * contien-[illegible] 13 milliards, cinq cens [illegible], ou environ, de lieuës [illegible]ques.

EUDOXE. Si l'on multiplie d'abord le grand cercle de la Terre par les deux tiers de son diamétre, ne trouvera-t-on pas la même chose ?

ARISTE. Sans doute, puisqu'un Globe est le produit de son grand cercle par les deux tiers de son
* N. [illegible] diamétre * ; & l'opération sera plus courte.

Comparons maintenant les Surfaces de deux Sphéres.

PROPOSITION X.

401. *Les Surfaces de deux Sphéres sont en raison doublée de celle de leurs rayons.*

Les surfaces de deux Sphéres sont comme les grands cercles dont elles sont quadruples *, puisque les touts sont comme leurs parties semblables (*a*) : or les cercles sont en raison doublée de leurs rayons, ou comme les quarrés de ces rayons *. * N. 398. * N. 272.

Ainsi les Surfaces des Sphéres sont comme les quarrés des rayons.

402. EUDOXE. *Soient deux Boules* B & C, *dont la premiere a le rayon double : quelle est la raison de leurs Surfaces ?*

ARISTE. 1°. Le rayon de B est au rayon de C, comme 2 à 1 ::

(a) Calcul littéral, N. 99.

donc 2, 1 sont les exposans des rayons.

2°. Les Surfaces étant en raison doublée de celle des rayons, je double la raison de leurs exposans; & j'ai 2, 1; 2, 1 (*a*).

3°. Je multiplie les antécédens par les antécédens & les conséquens par les conséquens; & les produits ou quarrés 4, 1, sont les exposans de la raison doublée des Surfaces; c'est-à-dire, que la première est quadruple de la seconde.

Eudoxe. En un mot, puisque les deux Surfaces sont comme les quarrés des rayons 2, 1; elles sont entr'elles comme 4 à 1.

403. *Mais, Ariste, je donne au Soleil un rayon centuple de celui de la Terre, conformément aux Observations. Il s'agit de mesurer la Surface de cet Astre.*

Ariste. Je prendrai donc d'a-

(*a*) Calcul Littéral, N. 183.

bord les exposans des rayons des deux Boules, c'est-à-dire, du Soleil & de la Terre. Puis quarrant les exposants, j'aurai dans les quarrés la raison des Surfaces* & connoissant déja la Surface de la Terre*, je connoîtrai celle du Soleil.

* N. 401.
* N. 399.

Calculons : 1°. le rayon du Soleil est centuple dans l'hypothèse : donc la raison du rayon au rayon a pour exposans, 100, 1.

2°. 10000, 1, quarrés de ces exposans 100, 1, sont les exposans des Surfaces : donc la Surface du Soleil, étant comme 10000 à 1, vaut dix-mille fois celle de la Terre.

Mais la Surface de la Terre comprend 27 millions de lieuës quarrées.

Donc la Surface du Soleil contient 10000 fois 27 millions de lieuës quarrées.

EUDOXE. *Enfin, il faut mesurer la solidité même du Soleil.*

ARISTE. Hé bien, 1°. Connois-
sant les demi-diamétres du So-
* N. leil & de la Terre*, je prendrai
403 & les exposans de ces rayons.
399. 2°. Je cuberai les exposans;
& les cubes seront les exposans
* N. de la raison des deux Sphéres*.
393. Ainsi, comme je connois la so-
* N. lidité du Globe terrestre*, je con-
400. noîtrai celle du Soleil.

Les exposans des rayons sont
* N. 100, 1*.
403. Cubons d'abord 100, puis 1;
les cubes sont 1000000, 1 (*a*):
donc la solidité du Soleil est à cel-
le de la Terre, comme 1000000
à 1. Par conséquent le Soleil est
un milion de fois aussi grand que
la Terre.

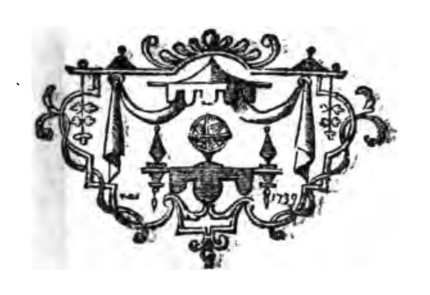
Or la Terre comprend 13 mil-
liards, cinq cens millions de
* N. lieuës cubiques, ou environ*.
400. Donc le Soleil contient un
million de fois 13 milliards, cinq

(*a*) Calcul Littéral, N. 343.

cens millions de lieuës.

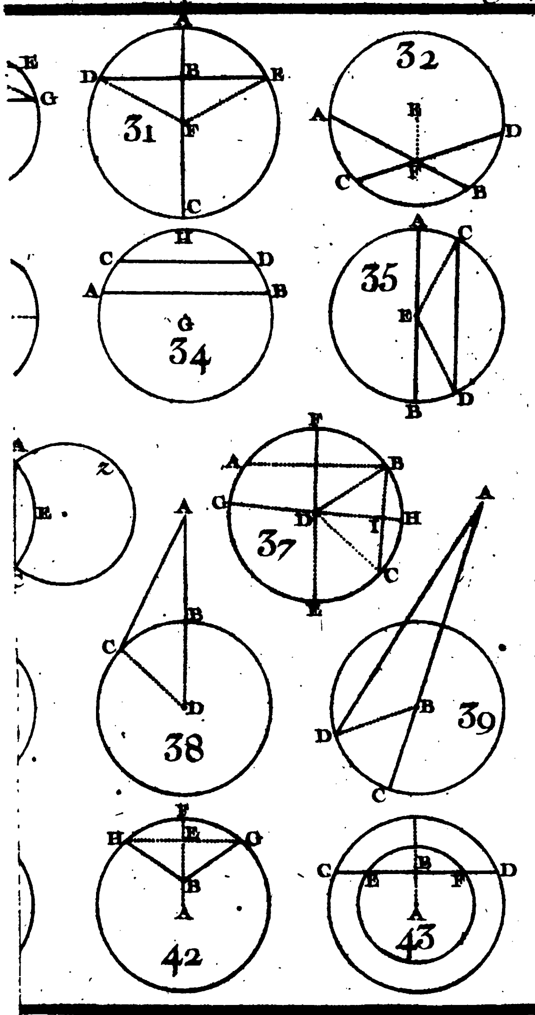
EUDOXE. Après cela, puis-je m'empêcher, Ariste, de vous demander quelques entretiens sur la Trigonométrie?

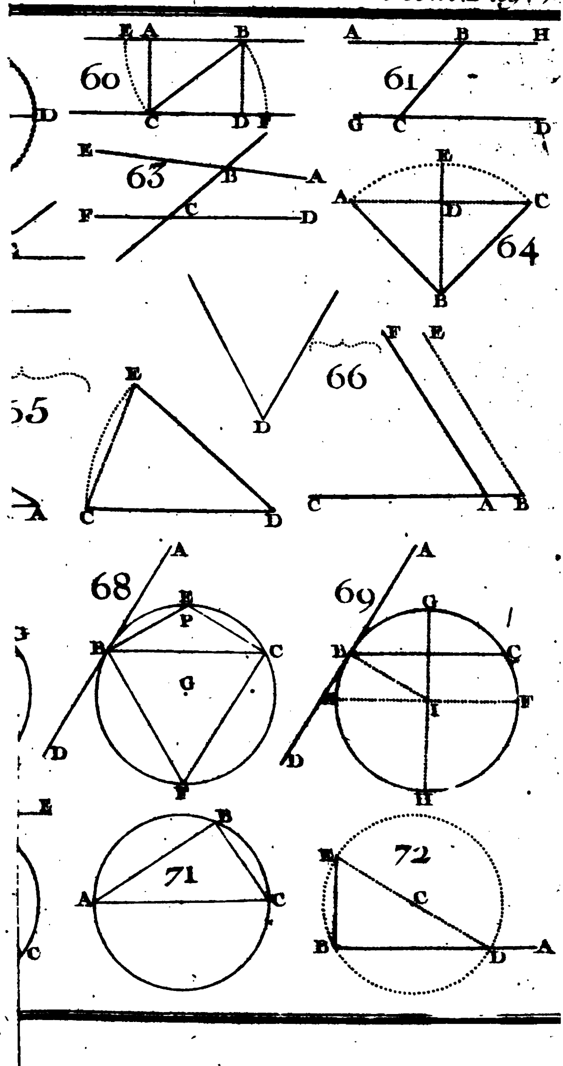
ARISTE. Votre plaisir, ce semble, Eudoxe, est de faire le mien; le même Systême d'Entretiens nous retracera donc d'autres idées.

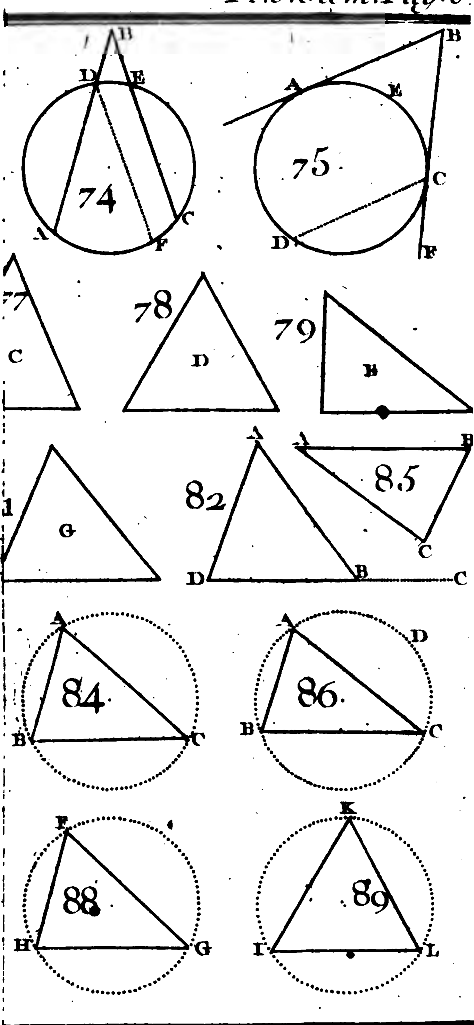


ENTRETIENS

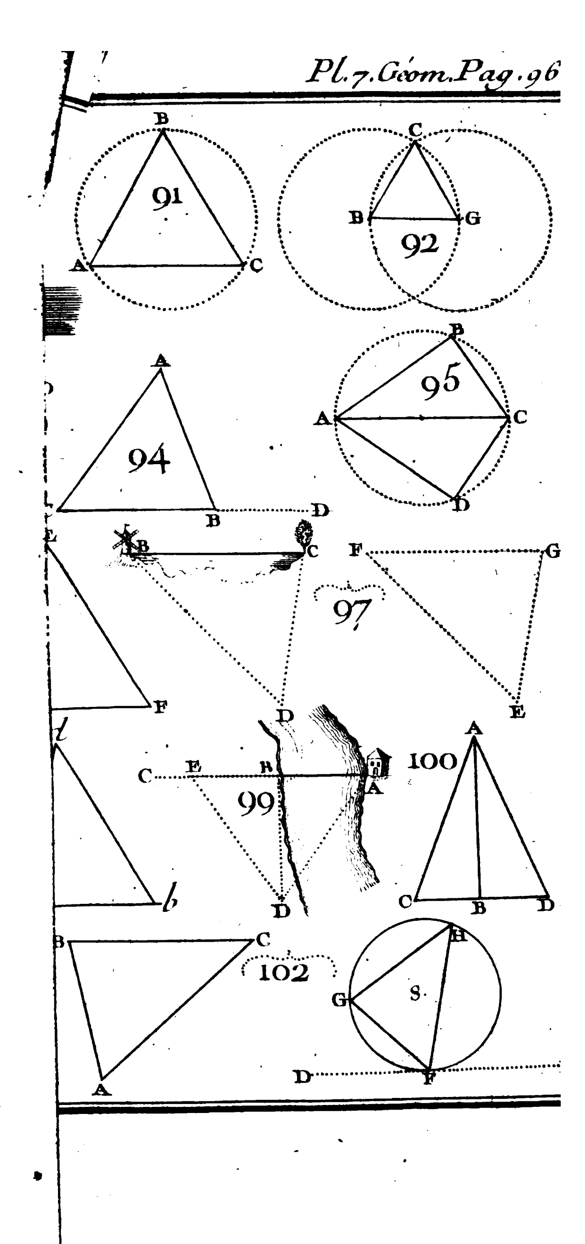
B
F
D
2
C
A
B
H
3
G
L
I
E
A
B
5
D
E
F
C
A
6
D
B
E
C
D
8
B
A
C
B
C
9
A
E
B
D
A
10
C
E
B
D
C
B
E
11
C
A
D
A
12
C
B
E
A
14
E
B
F


E
G
A
D
B
E
31
F
C
32
A
E
D
F
C
B
H
C
D
A
B
G
34
A
C
35
E
B
D
F
A
B
z
E
G
A
C
D
H
I
37
C
E
A
B
C
D
38
B
D
39
C
F
H
E
G
B
A
42
C
E
B
F
D
A
43


60
E
A
B
C
D
F
61
A
B
H
G
C
D
63
E
B
A
F
C
D
64
E
A
D
C
B
66
F
E
C
A
B
65
E
C
D
A
D
68
A
E
P
B
C
G
D
F
69
A
G
B
C
I
F
D
H
71
B
A
C
72
E
C
B
D
A

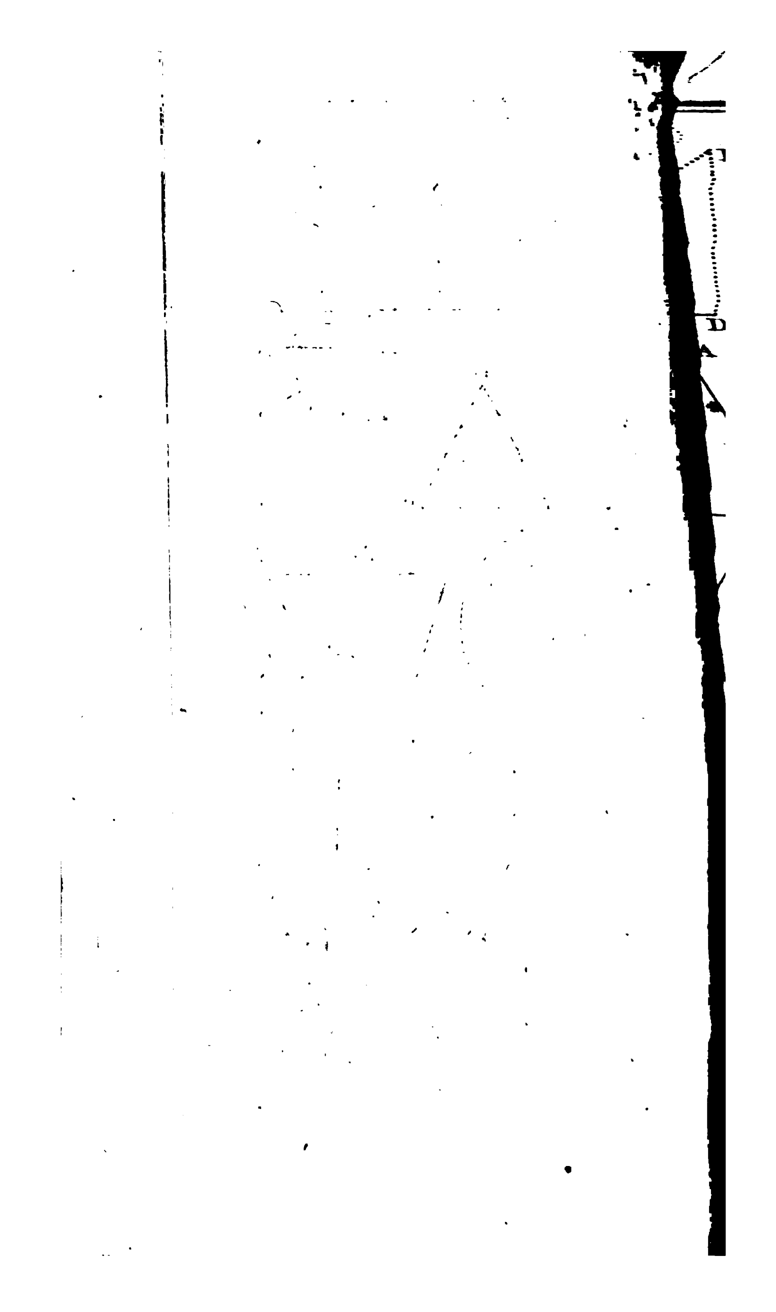


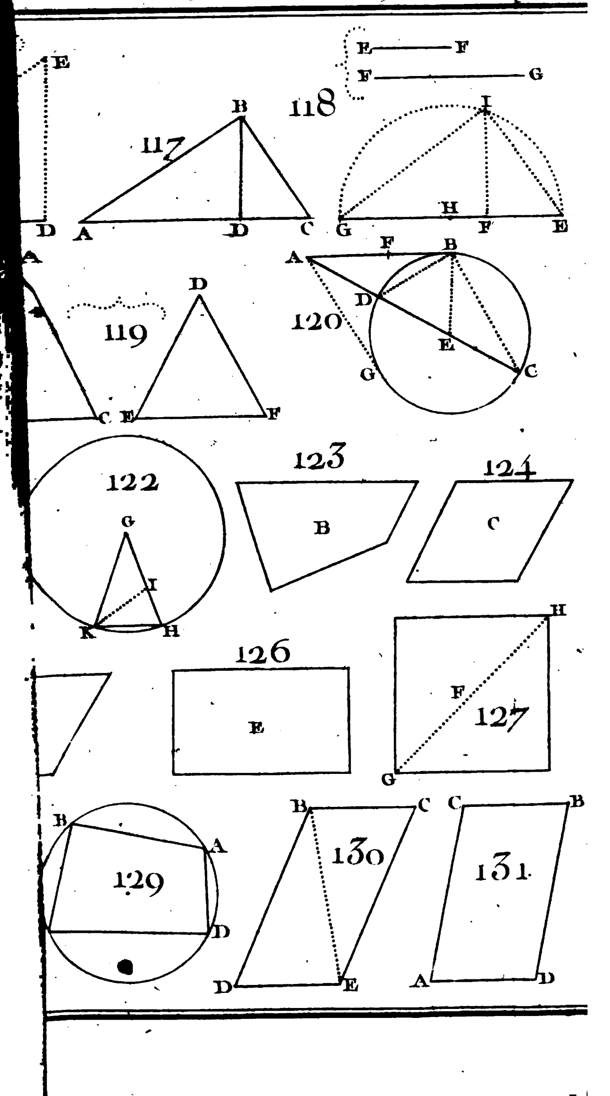
B
D
E
74
A
C
F
B
A
E
75
C
D
F
77
C
78
D
79
B
A
A
B
85
C
G
82
D
B
C
A
84
B
C
A
D
86
B
C
F
88
H
G
K
89
I
L



91
A
B
C
92
B
C
G
94
A
B
D
95
A
B
C
D
B
C
97
F
G
E
E
F
D
99
C
E
R
A
D
100
A
C
B
D
d
b
B
C
A
102
H
G
S
F
D

M
104
B
H
G
F
D
F
D
E
L
A
E
C
E
A
C
106
B
G
H
F
D
H
E
B
F
O
D F
Q
I L
109
B
x
z
R K
M
G
P
E
G
B
G
B
H
I
E
K
112
E
H
D
M
F
C
A
L
C
G
F
B
C
115
C
D
E
H
I
B
D
E
F
B
C
D




E
F
E
F
F
G
D
117
B
A
D
C
118
I
H
G
F
E
A
119
D
C
E
F
F
B
A
D
120
E
G
C
122
G
I
K
H
123
B
124
C
126
E
H
F
127
G
B
A
129
D
B
C
130
D
E
C
B
131
A
D

134

136

137

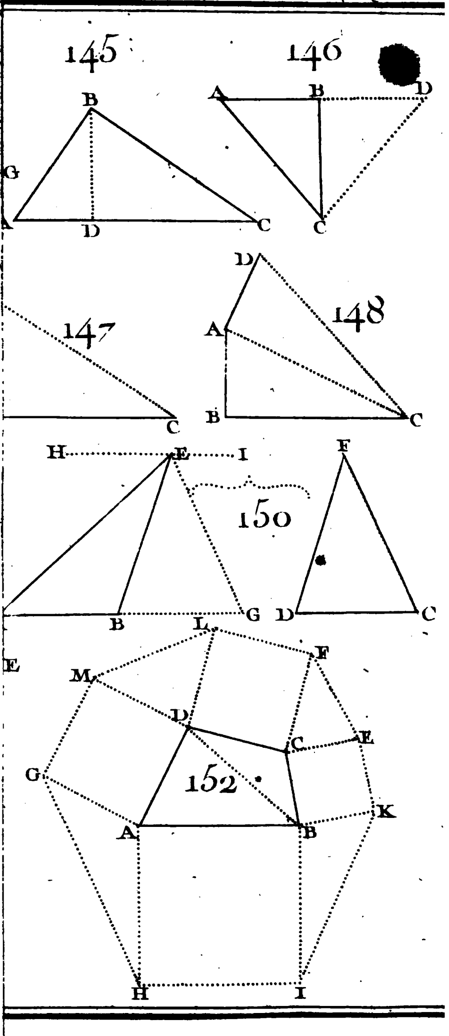
38

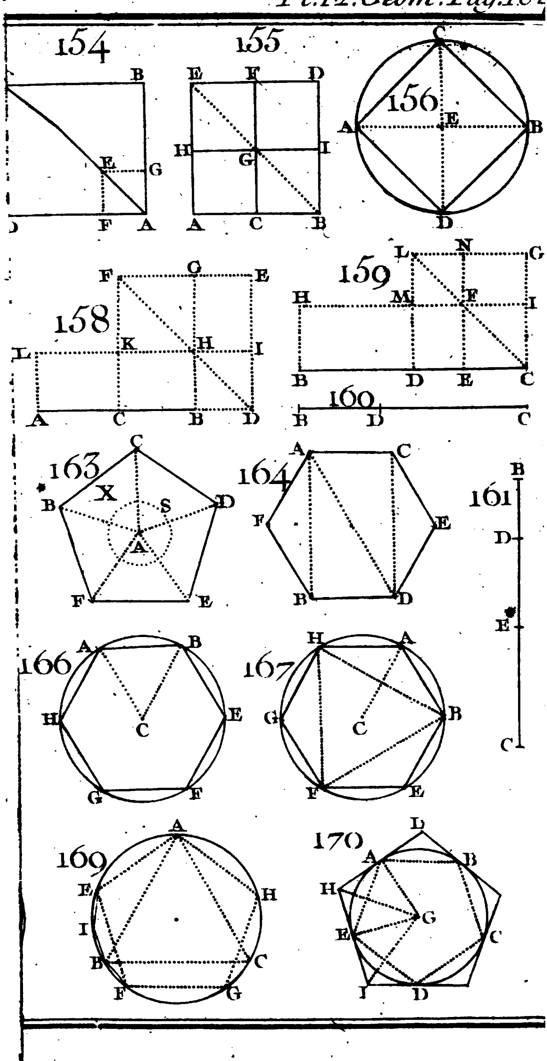
140

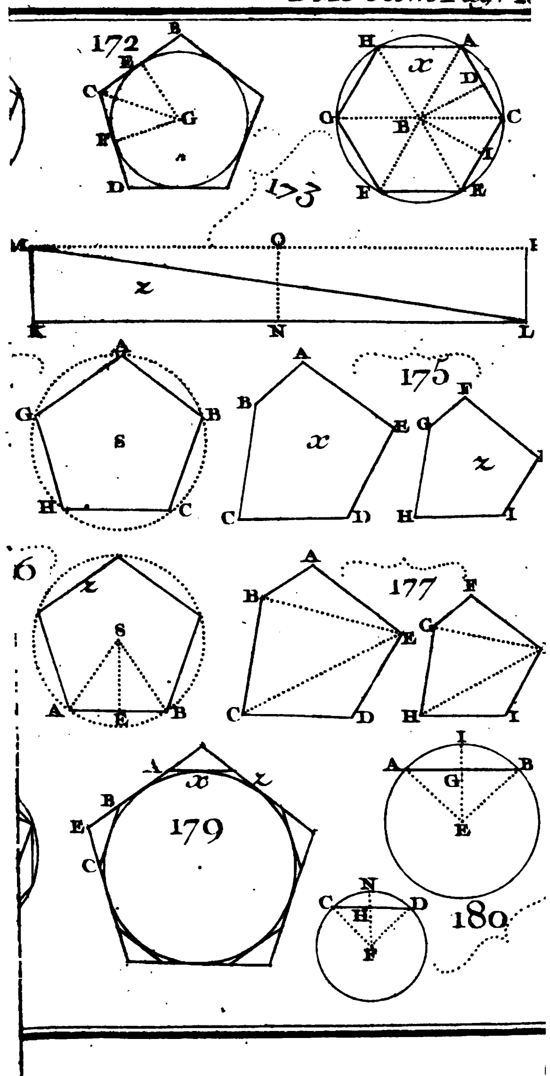
143

41

142


145
B
G
A
D
C
146
A
B
D
C
D
148
A
147
B
C
C
H
E
I
150
F
B
G
D
C
L
E
F
M
D
C
E
G
152
K
A
B
H
I


154
155
156
158
159
160
161
163
164
166
167
169
170


172
B
E
C
G
F
D
H
A
x
D
O
C
B
I
F
E
173
M
O
x
K
N
L
A
G
B
S
H
C
A
B
x
E
C
D
175
F
G
z
H
I
6
z
S
A
E
B
A
B
E
C
D
177
F
G
H
I
x
z
B
E
C
179
I
A
B
G
E
N
C
D
H
F
180

B
C D
F
H

C B E
A D
182

R T
192
V S

r
p
n
C

H E
185
C D I A
G F
B

A
186
B
D
C

D E
8
F H

M
190
O

K
L
191
H
M P N

194 B C F D I

195 D B G E C F

196 F C I G H E

198 F A D B C E G

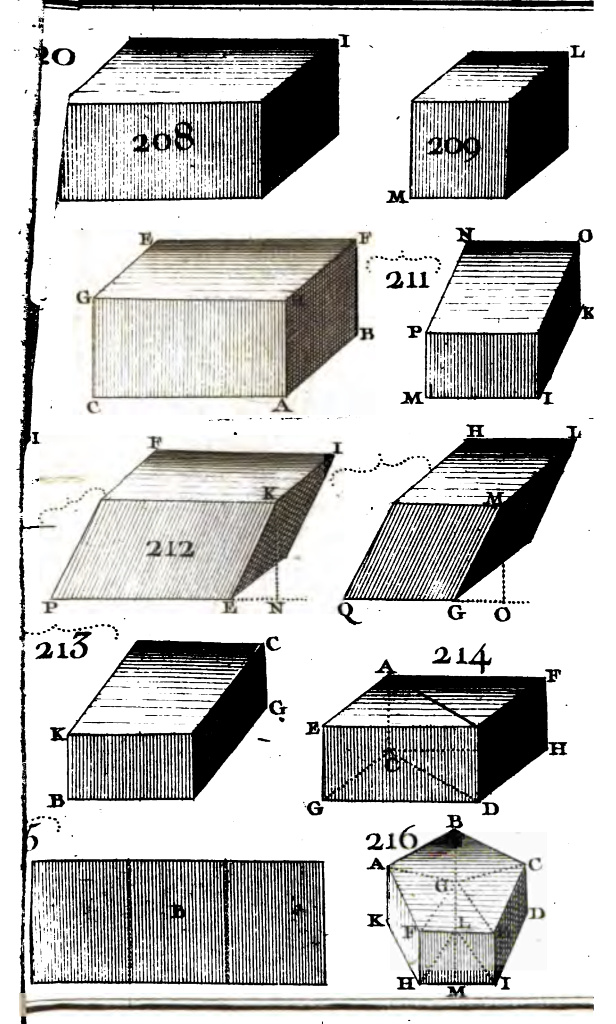
201 G I E C

200 G E N B F M

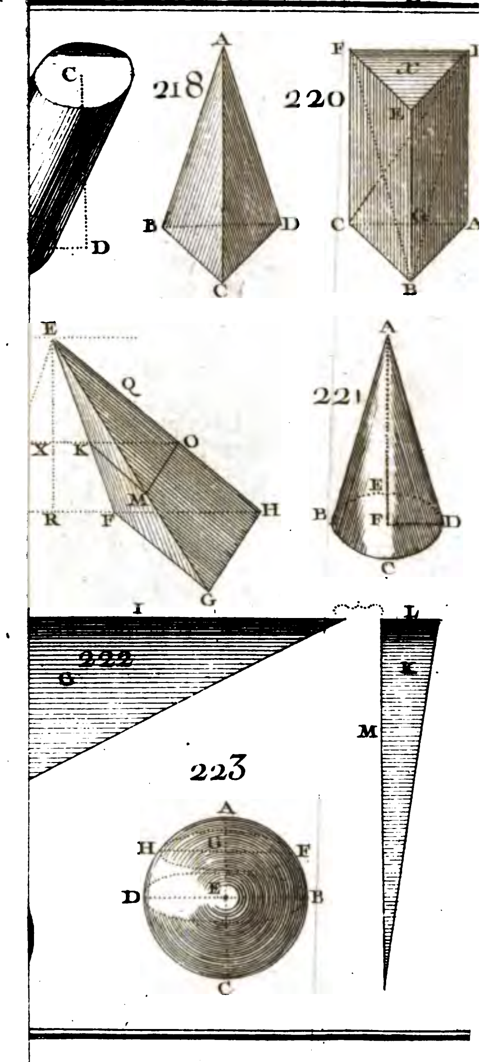
203 x z B C D E

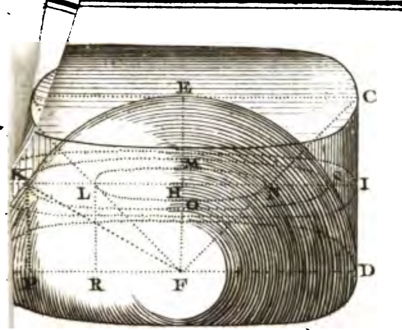
205 E C B G

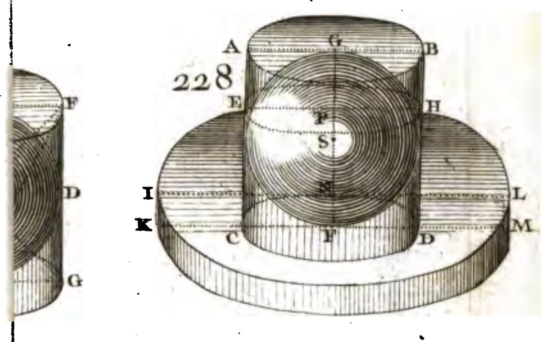
206 L A C G H F B D

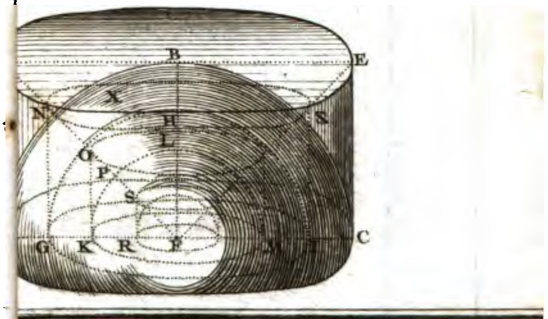


20
208
I
209
L
M
E
F
G
B
C
A
211
N
O
K
P
M
I
I
F
I
K
212
P
E
N
H
L
M
Q
G
O
213
C
G
K
B
214
A
F
E
H
G
D
6
B
A
216
B
A
C
G
D
K
F
L
H
M
I


218
220
221
222
223


E
C
M
K
L
H
O
N
S
I
D
P
R
F


228
A
G
B
E
H
P
S
N
I
L
K
M
C
F
D


B
E
X
N
H
S
L
O
P
S
G
K
R
F
C



ENTRETIENS MATHÉMATIQUES SUR LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

I. ENTRETIEN.

Sur la valeur des Sinus & des côtés des Figures rectilignes inscrites au Cercle.

ARISTE.  OUS voyez, Eudoxe, mon Cabinet décoré & tapissé, pour ainsi dire, d'un goût nouveau.

EUDOXE. C'eſt la Trigonométrie, ce ſemble, repréſentée ſous des traits réguliers, en figures artiſtement faites & rangées de même.

ARISTE. Il y a des perſonnes qui ſont ravies de ſe voir environnées d'ornemens riches, de figures travaillées avec toute la délicateſſe de l'art, mais qui ne leur remettent devant les yeux que la Fable, le menſonge, & les rêveries de la Poëſie. Ce n'eſt pas là mon goût ; j'aime à voir autour de moi des figures plus ſimples, mais qui ne me rappellent que des vérités inconteſtables.

EUDOXE. Et vous connoiſſez mon goût, il y a long-temps : vous me ferez donc part de ces vérités dans l'ordre où elles s'offriront à votre eſprit.

ARISTE. Les Définitions & les Propoſitions ſuivies nous conduiront lentement, mais ſurement,

à des Problêmes également curieux & utiles.

DEFINITIONS.

1. La Trigonométrie rectiligne est l'art de mesurer des grandeurs par la mesure des angles & des côtés des Triangles rectilignes.

2. Complément d'un angle ou d'un arc, est la quantité AE, dont un arc AC est plus petit que le quart de cercle CE. Fig. 1.

Complément au demi-cercle, ou *supplément* est la quantité AF, dont un arc AC est moindre que le demi-cercle CAF.

3. Sinus droit AB d'un angle ADC, ou d'un arc AC, est une perpendiculaire tirée d'une extrémité A de l'arc sur le diamétre ou le rayon qui passe par l'autre extrémité C, ou la moitié de la corde qui soutient un arc double (*a*).

(*a*) Géométrie, N. 87.

4. Sinus verſe, eſt la partie BC du rayon compriſe entre l'extrémité C de l'arc AC & ſon Sinus droit AB.

5. Sinus AI du complément, eſt le Sinus propre de l'arc AE, qui eſt complément au quart de cercle *.

* N. 2.

6. Sinus total ED eſt le Sinus du quart de cercle CE, ou de l'angle droit CDE, & par conſéquent le rayon même. Que l'angle ADC croiſſe, le côté AD s'approchant de ED : le Sinus AB croîtra, juſqu'à ce que confondu avec AD dans ED, il ſoit le rayon même ED : mais avançant de ED vers F, il diminueroit (a); car les moitiés de cordes qui ſe trouvent plus éloignées du centre, ſont plus petites : ainſi, le Sinus total eſt le plus grand des Sinus.

7. La Tangente CH d'un an-

(a) Géométrie, N. 65.

gle ADC ou d'un arc AC compris entre deux rayons qui forment l'angle, est une perpendiculaire tirée sur l'extrémité C d'un rayon CD & terminée par l'autre rayon prolongé DAH.

8. La Sécante de l'arc AC ou de l'angle ADC est le côté prolongé DAH qui va terminer la Tangente CH.

EG est la Tangente du complément; & DG, la Sécante du complément.

9. Enfin, le Sinus total, ou le rayon se divise d'ordinaire en 100000 parties, ou en 10000000, qui servent à déterminer la valeur des côtés des figures rectilignes inscrites au cercle, des Sinus, des Tangentes, des Sécantes.

Le diamétre double du rayon, sera double du Sinus total.

PROPOSITION I.

10. *Les quarrés du Sinus droit*

d'un arc & du Sinus de son complément sont, pris ensemble, égaux au quarré du rayon.

Fig. 2. Soient AD, Sinus droit de l'arc AE; & AB Sinus du complément AC; AF, rayon.

1°. L'angle BFD est droit ayant pour mesure le quart de cercle CE.

2°. Les deux angles B & D le sont, puisqu'ils sont faits par les perpendiculaires, ou les Sinus

* N. 3. AB, AD *; & par conséquent l'angle BAD l'est: car le Quadrilatere BD vaut 4 angles droits (*a*): donc, c'est un Rectangle (*b*).

Ainsi AB = DF, & le Triangle DAF est un Triangle rectangle, dont AF est l'hypoténuse.

Cela posé; je dis que les quarrés de AD, AB valent celui de AF.

Les quarrés de AD, DF va-

(*a*) Géométrie, N. 175.
(*b*) Ibid. N. 170.

sent le quarré de AF (*a*).

Or AB = DF : donc les quarrés de AB, AD valent celui de AF.

EUDOXE. En un mot, $\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AF}^2$: or AB = DF : donc $\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AF}^2$.

11. *ARISTE*. De-là, si dans un Triangle rectangle DAF, on prend l'hypoténuse AF pour rayon, les côtés AD, DF, sont Sinus des angles opposés : car 1°. AD est Sinus de l'angle AFE*. Fig. 2. * N. 3.

2°. DF = AB, Sinus de l'angle AFB = DAF alterne (*b*).

Donc DF est Sinus de l'angle DAF.

12. EUDOXE. *Connoissant l'hypoténuse* AF, *prise pour rayon, avec un côté* DF *d'un Triangle rectangle* DAF, *vous trouverez bientôt l'autre côté* AD.

(*a*) Géométrie, N. 204.
(*b*) Ibid. N. 101.

ARISTE. Du quarré de l'hypoténuse AF, j'ôte le quarré du côté connu DF : reste le quarré de l'inconnu AD (*a*).

Enfin, j'extrais la racine du quarré de l'inconnu AD (*b*), & la racine est la valeur de l'inconnu AD.

EUDOXE. En un mot, de AF^2 ôtez DF^2 : reste AD^2 ; & $\sqrt{AD^2} = AD$, puisque $AD \times AD = \overline{AD}^2$ (*c*).

13. De-là, connoissant le Sinus droit AD, on a le Sinus AB = DF du complément; car $AF^2 - AD^2 = DF^2 = AB^2$; & $\sqrt{AB^2} = AB$.

14. Mais connoissant les deux côtés AD, DF, *il faut trouver l'hypoténuse.*

*N.12. *ARISTE.* $\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AF}^2$ * :

(*a*) Géométrie, N. 204.
(*b*) Calcul Littéral, N. 74.
(*c*) Ibid. N. 65.

ainsi, $\sqrt{AD^2 + DF^2} = AF$.

De-là, 1°. Je prens la somme des quarrés des côtés AD, DF; & c'est le quarré de l'hypoténuse AF (*a*).

2°. J'extrais la racine de cette somme; & c'est l'hypoténuse même.

PROPOSITION II.

15. *Dans le quart de cercle* AH, *le Sinus droit* AB *d'un arc* AC *est moyen proportionnel entre la moitié* AD *du rayon & le Sinus verse* AE *de l'arc double* ACG. Fig. 3.

Soit FC perpendiculaire coupant la corde AG & l'arc AGC par le milieu B (*b*).

Je dis que ÷ AD. AB. AE.

Les angles ABF, AEG, sont droits, puisque AB, EG sont Sinus *; & l'angle en A est commun; donc les Triangles AFB, AEG sont proportionnels (*c*). * N. 3.

(*a*) Géom. N. 204. (*b*) Ib. 61. (*c*) Ib. 150.

Donc AF. AB :: AG. AE.

Donc AF — DF. AB :: AG — BG. AE; les moitiés étant comme les touts.

Or AF — DF = AD, & AG — BG = AB.

Donc ÷ AD. AB. AE.

16. EUDOXE. *Après cela, connoissant le rayon* AF *avec le Sinus droit* AB *d'un arc, vous trouverez, ce semble, le Sinus verse* AE *d'un arc double* ACG, *& le Sinus droit* EG *de l'arc double.*

ARISTE. 1°. Puisque ÷ AD. AB. AE *, $\frac{\overline{AB}^2}{AD} = AE$ (a).

* N. 15.

Ainsi, divisant le quarré du Sinus droit AB de l'arc soudouble par la moitié du rayon, j'aurai le Sinus verse AE de l'arc double ACG.

2°. Connoissant AE & AB, moitié de AG, je connois AE & AG, hypoténuse.

(a) Calcul Littéral, N. 139.

Or dans un Triangle rectangle, dès que l'on connoît l'hypoténuse & un côté, l'on connoît l'autre côté *.

*N. 12.

Ainsi je connois le Sinus droit EG de l'arc double.

De-là, connoissant le Sinus droit EG d'un arc, comme on connoît l'arc AG, on en connoît la moitié AC, & par conséquent son Sinus droit AB, qui donne le Sinus verse AE de l'arc double ACG : ainsi connoissant le Sinus EG d'un arc ACG, on aura son Sinus verse.

PROPOSITION III.

17. *Le quarré du côté* AB *d'un Triangle équilatéral* ABC *inscrit au cercle, vaut trois fois le quarré du rayon, ou du demi-diamétre.* Fig. 71.

Soit AE diamétre, qui coupant la corde BC par le milieu F, coupe de même l'arc BEC troisième

partie du cercle (*a*) : donc la corde BE, côté d'un Exagone, vaut le demi-diamétre (*b*).

Cela posé ; je dis que le quarré de AB vaut trois fois celui de BE.

Les quarrés de AB & de BE valent, pris ensemble, celui de AE (*c*), puisque l'angle ABE inscrit & appuyé sur le diamétre est droit.

Or le quarré de AE est quadruple de celui de BE, le quarré d'une ligne double étant quadruple (*d*) : donc les quarrés de AB & de BE sont, pris ensemble, quadruples de celui de BE.

Mais le quarré de BE ne vaut que le quarré de BE :

Donc le quarré de AB est triple du quarré de BE.

EUDOXE. En un mot, AB^2 +

(*a*) Géométrie, N. 58.
(*b*) Ibid. N. 238.
(*c*) Ibid. N. 204.
(*d*) Ibid. N. 216.

$\overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, quarré de l'hypoténuse :

Or $\overline{AE}^2 = 4\overline{BE}^2$: donc $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = 4\overline{BE}^2$.

Mais $\overline{BE}^2 = \overline{BE}^2$ précisément : donc $\overline{AB}^2 = 3\overline{BE}^2$.

18. *Et cela vous donne la valeur du côté* AB *d'un Triangle équilatéral.*

Ariste. Ce côté AB est la racine d'un quarré qui vaut trois fois le quarré du rayon*. *N.17.

Ainsi après avoir fixé la somme des trois quarrés du rayon, je prens la racine de cette somme (*a*); & c'est la valeur du côté AB.

$\sqrt{3\overline{BE}^2} = AB$, puisque $AB = \sqrt{\overline{AB}^2} = 3\overline{BE}^2$.

PROPOSITION IV.

19. *Le côté* AB *du quarré* ABCD Fig. 5.

(*a*) Calcul Littéral, N. 73.

inscrit au cercle, est la racine de deux fois le quarré du rayon.

Soient AC, BD, deux diamétres qui se coupent à angles droits au centre E. Ainsi, le Triangle ABE est rectangle; & les côtés EA, EB sont rayons.

Et je dis que AB est la racine de la somme des quarrés de EA, EB.

Le quarré de l'hypoténuse AB vaut la somme des quarrés des côtés EA, EB (*a*) : or *AB est la racine* du quarré de AB, puisque AB × AB donne le quarré de AB (*b*).

Donc AB est la racine de la somme des quarrés de EA, EB.

20. *EUDOXE*. Ainsi, $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$ (*a*) : or $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$ (*b*) :
Donc $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2}$.

Et vous allez trouver le côté du

(*a*) Géométrie, N. 204.
(*b*) Calcul Littéral, N. 19.

quarré inscrit au cercle.

ARISTE. Je prendrai la racine de la somme de deux quarrés du rayon ; & ce sera le côté du quarré *. *N. 19.

PROPOSITION V.

21. *Si le grand segment d'une ligne coupée en moyenne & extrême raison, est le côté d'un Exagone ; le petit segment est le côté d'un Décagone inscrit au même cercle.*

Soit AB divisée de la sorte en C (a) ; AC, côté d'un Exagone, ou égal au rayon EB = EC = AC (b). Fig. 6.

Je dis que BC, petit Segment, est côté d'un Décagone inscrit.

1°. Les Triangles EBC, ECA sont isoceles, puisque EB = EC = AC (c).

2°. ÷ AB. AC. BC (d) : donc

(a) Géométrie, N. 162.
(b) Ibid. N. 238.
(c) Ibid. N. 120.
(d) Ibid. N. 162.

∴ AB. EB = AC. BC.

Donc les Triangles ABE, EBC, sont semblables (*a*) ayant un angle commun ABE = CBE, & les côtés qui le comprennent, proportionnels.

Donc le Triangle ABE est isocele aussi, & l'angle ABE = AEB, l'angle CAE = BEC.

Cela posé ; l'angle extérieur BCE = AEC + CAE = AEC (*b*).

Donc l'angle BCE, & par conséquent CBE = BCE est double de l'angle CAE = BEC : donc les angles BCE & CBE sont doubles, chacun, de BEC : ainsi BEC est de 36 dégrés (*c*) ; car chacun des angles de la base étant double de celui du sommet, l'angle du sommet doit être de 36 dégrés ; & par conséquent la corde BC est la corde d'un arc de 36 dé-

(*a*) Géométrie, N. 160.
(*b*) Ibid. N. 129.
(*c*) Ibid. N. 164.

grés,

grés, donc le côté BC est le côté d'un Décagone inscrit (*a*).

EUDOXE. En effet, l'angle extérieur CED, étant égal aux intérieurs opposés BCE (*b*), CBE, doubles, chacun, de l'angle BEC, est quadruple de BEC: donc l'arc CD = 4CB; donc la corde BC soutenant la cinquième partie de la demi-circonférence, ou la dixième de la circonférence, est côté du Décagone.

ARISTE. Et bientôt, nous trouverons au même temps les côtés du Décagone & du Pentagone.

PROPOSITION VI.

22. *Le quarré du côté du Pentagone régulier inscrit au cercle, vaut les quarrés des côtés de l'Exagone & du Décagone du même cercle.*

Soient ABCDEA, Pentagone inscrit; AB, côté du Pentagone; AH = BH, côté du Décagone; FH, rayon coupant le Fig. 7.

(*a*) Géom. N. 241. (*b*) Ibid. N. 129.

côté AB, & par conséquent l'arc AHB, par le milieu, I, H (*a*); FK, rayon coupant le côté AH & par conséquent l'arc AKH par le milieu L, K; BF rayon égal au côté de l'Exagone (*b*); AFG, diamétre coupant le côté CD, & par conséquent l'arc CGD, par le milieu, N, G.

Je dis que $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{AH}^2$.

1°. L'angle inscrit BAF = BAG, vaut l'angle au centre BFM, qui a pour mesure l'arc BH, moitié de BC, & l'arc HK, moitié de CG=AKH (*c*); & l'angle ABF est commun: donc les deux Triangles ABF, MBF sont semblables, & leurs côtés homologues sont proportionnels (*d*).

Donc ÷ AB. BF. BM : donc

(*a*) Géométrie, N. 58 & 62.
(*b*) Ibid. N. 238.
(*c*) Ibid. N. 114.
(*d*) Ibid. N. 133 & 150.

$AB \times BM = \overline{BF}^2$ (*a*).

2°. Dans les Triangles AML, HML, le côté AL = HL; le côté LM eſt commun, & les angles compris ſont égaux étant droits en L, par la conſtruction : donc les deux Triangles ſont égaux (*b*) : ainſi, l'angle LAM = LHM.

Or l'angle commun LAM = HBA : car puiſque le côté BH = AH, le Triangle ABH eſt iſocele : donc les deux Triangles ABH, AHM ſont ſemblables ayant les angles égaux ; & par conſéquent ÷ AB. AH. AM :

donc $AB \times AM = \overline{AH}^2$.

Ainſi, ÷ $AB \times BM = \overline{BF}^2$, &

$AB \times AM = \overline{AH}^2$:

Or $AB \times BM + AB \times AM =$

(*a*) Calcul Littéral, N. 136.

(*b*) Géométrie, N. 136.

$AB \times AB$, ou $\overline{AB}^2$:

Donc $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{AH}^2$.

EUDOXE. J'attens ici la résolution d'un Problême que vous avez annoncée.

ARISTE. Au lieu d'un Problême, je vois une foule de Problêmes qui viennent s'offrir à la suite les uns des autres.

EUDOXE. Hé bien, c'est à vous de les résoudre dans le même ordre.

ARISTE. Essayons donc de le faire.

PROBLÊME I.

23. *Trouver les côtés d'un Décagone & d'un Pentagone.*

Fig. 8. Soient D, centre du cercle BAC; BC, diamétre; DA, perpendiculaire sur le milieu D du diamétre BC; E, milieu du rayon CD=DA; EF=EA; enfin, AF.

J'aurai dans DF le côté du Décagone inscrit; & dans AF, le côté du Pentagone.

Car 1°. La ligne DF étant ajoutée à CD divisée par le milieu E, le rectangle de CF par DF, avec le quarré de ED, est égal au quarré de EF, ou de EA = EF (a), & par conséquent aux quarrés de ED, DA (b).

Otez le quarré commun de ED : reste le rectangle de CF par DF, égal au quarré de DA = CD rayon connu : donc ÷ CF. CD. DF (c).

Donc CF est divisée en moyenne & extrême raison au point D (d).

Or le grand Segment CD étant moyen, ou côté de l'Exagone; DF, petit segment, est côté du Décagone inscrit au même cercle*. *N. 271.

Ainsi, divisant par CF le quarré du rayon CD, j'ai

(a) Géométrie, N. 221.
(b) Ibid. N. 204.
(c) Calcul Littéral, N. 141.
(d) Géométrie, N. 162.

dans le quotient la valeur de DF (*a*), ou celle du côté du Décagone.

Mais pour diviser par CF le quarré du rayon CD, il faut connoître CF, ce qui est facile. Car CF = CE + EF = EA : or $EA^2 = AD^2 + ED^2$; & AD = CD, ED = $\frac{1}{2}$CD : donc, &c.

2°. Le quarré du côté du Pentagone est égal aux quarrés des côtés de l'Exagone & du Décagone inscrits au même cercle *: or le quarré de AF est égal aux quarrés de DA, DF, (côtés connus (*b*), DA de l'Exagone, DF du Décagone) : Donc AF est le côté du Pentagone.

*N. 22.

Ainsi, prenant la racine du quarré de AF, ou de la somme des quarrés de DA, DF, j'ai la valeur de AF, ou du côté du Pentagone.

(*a*) Calcul Littéral, N. 50.
(*b*) Géométrie, N. 204.

PROBLÉME II.

24. *Trouver le côté d'un Quindécagone.*

AB côté du Quindécagone, *Fig. 9.* est une corde comprise entre la base du Triangle équilateral ACD & celle du Pentagone CEFBH inscrits au même cercle (*a*).

Cela posé ; 1°. Connoissant AD, côté du Triangle équilatéral *, & *N. 18. BF, côté du Pentagone*, je con- *N. 23. nois & leurs moitiés AI, BL, Sinus droits des arcs AM, BM, & leur différence AN, qui est l'excès de AI connue sur BL connue & égale à NI.

2°. BO = LP, étant Sinus du complément BR ; & AQ = IP = NO, Sinus du complément AR, je connois LP & IP * avec *N. 13. leur différence LI = BN.

Enfin, connoissant les côtés AN, BN, du Triangle rectangle ANB, je prens la somme de leurs

(*a*) Géométrie, N. 243.

quarrés, égale au quarré de AB(*a*); & la racine de cette somme est AB, côté du Quindécagone.

PROBLÉME III.

25. *Trouver la corde de 24 dégrés*

Le côté du Quindécagone est corde de 24 dégrés, puisque 24
N.24. × 15=360 : donc ayant ce côté, j'ai la corde de 24 dégrés.

PROBLÉME IV.

26. *Trouver le Sinus d'un arc de 12 dégrés.*

C'est la moitié de la corde de
*N.25. 24 dégrés (*b*), corde connue*.

PROBLÉME V.

Fig.10. 27. *Connoissant la corde* AB *d'un arc, trouver la corde* BC *du supplément.*

Le Triangle ABC est rectangle (*c*) : ainsi, du quarré de AC,
N. 9. diamétre connu, j'ôte le quarré de la corde connue AB : reste le

(*a*) Géométrie, N. 204.

(*b*) Ibid. N. 81.

(*c*) Ibid. N. 114.

quarré

quarré de BC (*a*) ; & la racine de ce quarré est BC, corde du supplement.

En un mot, $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$; & $\sqrt{\overline{BC}^2} = BC$.

PROBLÊME VI.

28. *Connoissant la corde d'un arc, trouver celle qui soutient la moitié de l'arc.*

Soit EB, rayon perpendiculaire sur la corde AD connue, la coupant par le milieu F, aussi-bien que l'arc ABD (*b*). Il faut trouver AB, corde de l'arc ACB. Fig. 11.

Je tire EA : voilà deux rayons connus, EB, EA, & deux Triangles rectangles AFE, AFB, dont je connois le côté commun AF.

Cela posé ; 1°. de $\overline{EA}^2$ connu,

(*a*) Géométrie, N. 204.

(*b*) Ibid. N. 58.

j'ôte $\overline{AF}^2$: reste $\overline{EF}^2$ (*a*), dont la racine est EF.

2°. Connoissant EF, je connois FB, reste du rayon.

Enfin, connoissant AF & FB, j'ai dans la somme de leurs quarrés, celui de l'hypoténuse AB; & la racine de cette somme est AB.

PROBLÉME VII.

Fig. 12. 29. *Connoissant la corde* AB *d'un arc* ACB, *trouver la corde* AD *d'un arc double* ACD.

Le Triangle BAE est rectangle (*b*).

Ainsi, 1°. Du quarré de BE, double rayon connu, j'ôte le quarré de AB : reste le quarré de AE, ou $\overline{AE}^2$, dont la racine est AE; & je connois AE.

2°. Le côté BD = AB, & DE

(*a*) Géométrie, N. 204.
(*b*) Ibid. N. 115.

= AE, connus (*a*), les arcs égaux donnant des cordes égales ; & je connois les côtés BD, DE.

3°. Multipliant DE par AB, & AE par BD, j'ai dans le produit total la valeur du produit de AD par BE, puisque dans le Quadrilatere inscrit au cercle, le rectangle des deux Diagonales vaut les deux rectangles des côtés opposés (*b*).

Enfin, ce produit de AD par BE, je le divise par BE ; & le Quotient est AD (*c*).

Par la même voie, connoissant deux cordes différentes, on connoîtra la corde qui soutient un arc égal aux deux arcs soutenus par les deux cordes connues.

PROBLÉME VIII.

30. *Connoissant la corde d'un arc, trouver la corde qui soutient une par-*

(*a*) Géométrie, N. 56.
(*b*) Ibid. N. 200.
(*c*) Calcul Littéral, N. 50.

tie quelconque de cet arc.

Fig. 13. Soit AB, corde de 60 dégrés: il faut trouver AC, corde de 20 dégrés.

AC corde de 20 dégrés vaut plus que le tiers de AB corde de 60 dégrés: car les trois cordes AC, CD, DB, qui soutiennent, chacune, le tiers de l'arc ACDB, font, prises ensemble, une ligne plus longue que la corde AB *(a)*; de plus les cordes ne sont pas entr'elles comme les arcs *(b)*.

Cela posé; 1°. Prenant le tiers de la corde de 60°, égale au rayon, ou de 10000000 parties *, j'ajoute à ce tiers quelques parties, & je suppose que la somme de l'addition est la valeur de la corde AC. [* *N. 9.*]

2°. Avec cette valeur de la corde AC, je cherche la corde de 40 dégrés, puis de 60 *. [* *N. 29*]

(*a*) Géométrie, N. 15.
(*b*) Ibid. N. 271.

Si ma ſuppoſition eſt juſte, il doit venir pour la corde de 60 dégrés, 1000000. Vient-il plus ou moins? la ſuppoſition eſt trop forte ou trop foible. J'augmente ou je diminue, juſqu'à ce que je trouve, en opérant de même, 1000000 pour la corde 60°. & la ſuppoſition qui me donne cette valeur eſt la corde de 20 dégrés, ou le tiers que je cherchois.

La même voye donnera la corde qui ſoutient la quatrième partie, la cinquième, &c.

PROBLÉME IX.

31. *Connoiſſant la corde qui ſoutient un arc double, trouver le Sinus d'un arc ſoudouble.*

Je prens la moitié de la corde de l'arc double; & c'eſt le Sinus d'un arc ſoudouble, puiſque le Sinus d'un arc eſt la moitié d'une corde qui ſoutient un arc double (a).

(a) Géométrie, N. 87.

PROBLÉME X.

32. *Trouver les cordes de 120 dégrés, de 90, de 72, de 60, de 36, de 24.*

Ces cordes font les côtés du Triangle équilateral, du *Quarré*, du Pentagone, de l'Exagone, du Décagone, du Quindécagone.

*N 18. 20. 9. 23. 25. Ainsi, prénant les côtés de ces Poligones *, j'aurai les cordes de 120 dégrés, de 90, &c.

PROBLÉME XI.

33 *Trouver les Sinus de 60 dégrés, de 45, de 36, de 30, de 18, de 12.*

Ces Sinus font les moitiés des cordes doubles (*a*).

N.32. Ainsi, connoissant les cordes, j'ai dans leurs moitiés, les Sinus.

*N.30. Par le même principe, ayant la corde de 20 dégrés *, j'aurai dans la moitié le Sinus de 10°.

(*a*) Géométrie, N. 87.

PROBLÉME XII.

34. *Connoiſſant le Sinus* AB *d'un arc* AC , *trouver le Sinus* DE *d'un arc double* ACD. *Fig.14.*

1°. Les Sinus égaux AB, CH du même arc AC=CA, étant moitiés de cordes égales (*a*), ſont également éloignés du centre F dans tous leurs points correſpondants (*b*) : donc BF=HF=CG, Sinus du complément, connu dès que l'on connoît le Sinus droit * : ainſi, je connois BF. *N.13.

2°. Je connois AF rayon* & la corde AD double du Sinus AB donné. * N. 9.

3°. Les Triangles ABF, ADE ſont équiangles ayant un angle droit, chacun, en B, E, & un angle commun A.

Cela poſé ; AF. BF : : AD.

(*a*) Géométrie, N. 87.
(*b*) Ibid. N. 64.

DE (*a*); & connoissant trois termes, AF, BF, AD de la proportion, je connois la quatrième DE (*b*).

PROBLÈME XIII.

Fig. 14. 35. *Connoissant le Sinus* DE *d'un arc double* ACD, *trouver le Sinus* AB *d'un arc soudouble* AC.

1°. Connoissant le Sinus droit DE, je connois le Sinus DI du
N. 13. complément DK, & par conséquent EF = DI.

2°. Connoissant EF, je con-
* N 9. nois EA, reste du rayon connu*.

3°. Connoissant DE & EA, je connois leurs quarrés $\overline{DE}^2 + \overline{EA}^2$, & par conséquent le quarré de l'hypoténuse AD, puisque $\overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EA}^2$ (*c*).

(*a*) Géometrie, N. 150.
(*b*) Calcul Littéral, N. 137.
(*c*) Géométrie, N. 204.

Enfin, j'ai dans la racine du quarré de AD, ou dans $\sqrt{\overline{AD}^2}$, la valeur de AD, dont la moitié est AB.

PROBLÉME XIV.

36. *Connoissant les Sinus* AB, CD, *de deux arcs* AE, AC; *trouver le Sinus* CF *de l'arc* CAE *formé des deux arcs.* Fig. 15.

Les Triangles CGD, CLD, LHF, DHI, AHB, sont semblables (*a*), ayant tous un angle droit en G, D, F, I, B, fait par un Sinus AB, CD, ou CF, ou par une parallele GD à une perpendiculaire FB sur un Sinus AB, avec un angle opposé au sommet L, ou commun H.

D'ailleurs, on connoît AH = EH, rayon, & BH = AM, Sinus du complément *. Enfin, connoissant le Sinus CD de l'arc *N. 13.

(*a*) Géométrie, N. 133.

AC, je prens sur le rayon connu
*N.16. AH, le Sinus verse DA *: reste
DH connue.

Cela posé; 1°. AH. DH :: AB. DI = GF (a): voilà donc GF = DI connue (b): car connoissant les trois premiers termes d'une proportion, l'on a le quatrième.

2°. AH. BH :: DC. CG; je connois donc CG, & par conséquent GF + CG. Or GF + CG = CF. Ainsi, je connois CF.

PROBLÉME XV.

Fig.15. 37. *Connoissant les Sinus* AB, CF *de deux arcs* AE, CE; *trouver le Sinus* CD *de leur différence* AC.

1°. Connoissant CF, je connois FH = CK, Sinus du com-
*N.13. plément CN *. Par la même raison connoissant AB, je connois

(a) Géométrie, N. 150.

(b) Calcul Littéral, N. 137.

BH = AM, Sinus du complément AN.

2°. BH. AB : : FH. LF (a) : voilà LF connue *, & par conséquent LC, reste du Sinus connu CF. *N. 36.

3°. AH. BH : : LC. CD : ainsi, je connois CD (b), Sinus de la différence AC.

Et tout cela nous conduit à la construction des Tables des Sinus.

EUDOXE. Aussi me reverez-vous bientôt ici.

II. ENTRETIEN.

Sur les Tables des Sinus, des Tangentes & des Sécantes.

EUDOXE. LA multitude va aux Thuilleries, aux champs Elisées ; un certain mon-

(a) Géométrie, N. 150.
(b) Calcul Littéral, N. 137.

de court aux Spectacles ; & mon goût me ramene dans votre Cabinet, Ariste, pour voir votre idée sur ce qu'on nomme Tables des Sinus.

ARISTE. C'est vous priver, Eudoxe, d'un plaisir bien sensible, pour des choses qui ne flattent guére les sens, mais qui n'occupent pas moins l'esprit, & qui peut-être font couler le temps aussi vite. Quoïqu'il en soit, vous voulez que je dise mes idées à l'ordinaire ; & je le fais.

38. D'abord, Tables des Sinus, des Tangentes, & des Sécantes, sont des colonnes de chiffres, dont les unes expriment combien chaque Sinus, depuis le Sinus d'une minute jusqu'à celui de 90 dégrés, contient de parties du Sinus total, ou du rayon ; combien chaque Tangente, ou chaque Sécante.

Commençons par la construc-

tion de la Table des Sinus.

39. 1°. Faut-il trouver les Sinus des dégrés depuis 1 dégré jusques à 90? Je prens tantôt le Sinus d'un arc double *, tantôt le Sinus d'un arc soudouble *, tantôt le Sinus de la différence de deux arcs *. *N.34. *N.31. & 35. *N.36.

Par là, ayant par éxemple, le Sinus de 10 dégrés *, & le Sinus de 12 *, j'ai d'une part les Sinus de 20 dégrés, de 40, de 80; de 24, de 48; & de l'autre, j'ai les Sinus de 5 dégrés, de 6, de 3. *N.30. & 31. *N.26.

Ayant les Sinus de 5 dégrés & de 3, j'ai le Sinus de 2, différence de 5 & de 3, le Sinus de 1.

Ayant les Sinus de 1, 2, 3, 4, j'ai les Sinus de 8, 16, 32, 64.

Ayant les Sinus de 1, 8, j'ai le Sinus de la différence 7, &c.

40. 2°. Faut-il trouver les Sinus des minutes depuis une jusqu'à 60?

On peut les prendre comme ceux des dégrés.

N.39. Ayant le Sinus d'un dégré, j'ai les Sinus de 60′, de 30′, de
* N. 3. 15′, de 7′ $\frac{1}{2}$, la corde de 15′*,
* N.29. de 5′, de 3′, de 10′, de 12′*, &
& 30. par conséquent les Sinus de 5′,
N.31. de 6′, de 3′, de 2′, différence de 5′ & de 3′, & les Sinus de 3′ & de 2′, me donnent ceux de 1′ $\frac{1}{2}$, de 1′, &c.

EUDOXE. Ne peut-on point encore parvenir là par une autre voye?

Ici, les arcs, à cause de leur petitesse, peuvent se prendre pour des lignes droites, faisant mêmes angles avec les rayons : donc les Triangles formés par les Sinus droits avec les Sinus verses & les arcs sont sensiblement des Triangles rectilignes semblables ; & par conséquent, les Sinus & les arcs sont sensiblement proportionnels.

Cela posé; 1°. Ayant le Sinus de 12 dégrés, on aura les Sinus de 6, 3, 1 ½. 2°. Ayant le Sinus de 1 ½ dégrés, on aura le Sinus de 45, moitié de 1 ½ dégré. 3°. Ayant le Sinus de 45′, on aura le Sinus de 1′ par une régle de trois, en disant, si 45′ donnent tant de parties du rayon, combien 1′? Si 45′ donnent tant, combien 60′ = 1 dégré?

Or ayant le Sinus de 12 dégrés, de 6, de 1, on aura les Sinus des autres dégrés, en prenant le double, la moitié, la différence.

Ainsi, ayant le Sinus de 12 dégrés, on peut prendre & les minutes & les dégrés.

41. Mais enfin, ayant les Sinus des minutes jusques à 60′, & des dégrés jusqu'à 90°; il faut trouver les Sinus de tant de dégrés & de minutes.

ARISTE. Je partage les arcs dont les dégrés sont en nombre

impair, & leurs complemens; & j'ai les Sinus de tant de dégrés & de minutes.

Ayant le Sinus de 45 dégrés, j'ai dans le Sinus de la moitié de l'arc, le Sinus de 22° 30′, &c..

Enfin, en subdivisant, on aura les Sinus des secondes, des tierces, &c. par exemple, ayant le Sinus de 1′, j'ai le Sinus de 30″, de 15″, de 7″, 30‴, &c.

EUDOXE. Je conçois assez votre idée sur la manière de construire la Table des Sinus.

ARISTE. Quelques Propositions sur la valeur des Tangentes, & quelques Problèmes, nous donneront la Table des Tangentes.

PROPOSITION I.

Fig. 16. 42. *La Tangente* AB *d'un arc* AD *est au rayon* AC, *comme le Sinus droit* DE *de cet arc est au Sinus* DF *de son complément* DG.

Je

Je dis que AB. AC : : DE. DF.

1°. Les angles DEC, DFC sont droits étant faits par des Sinus, qui sont des perpendiculaires, & l'angle ECF l'est, ayant pour mesure le quart de cercle AG. Donc le Quadrilatere EF qui vaut quatre droits est un rectangle (a). Ainsi, DF = CE.

2°. Les Triangles BAC, DEC, qui ont les angles A & E droits, & l'angle C commun, sont équiangles (b).

Donc AB. AC : : DE. EC = DF (c) : donc AB.AC : : DE.DF.

43. *Eudoxe*. Donc $\frac{AC \times DE}{DF} =$ AB (d).

Ainsi, multipliant le rayon AC par le Sinus droit DE, & divisant le produit par le Sinus connu du complément, on aura dans le

(a) Géométrie, N. 175.
(b) Ibid. N. 133.
(c) Ibid. N. 150.
(d) Calcul Littéral, N. 137.

Quotient la valeur de la Tangente.

Fig. 16. 44. *Mais connoissant le Sinus droit* DF *d'un arc* DG *& le Sinus* DE *du complément* AD ; *il s'agit de trouver la Tangente* AB *du complément* AD.

ARISTE. A cause des Triangles *N. 43. semblables *, DF = EC. DE :: AC. AB.

Donc $\frac{AC \times DE}{DF} = AB$ (*a*).

Ainsi, multipliant le rayon par le Sinus du complément, & divisant le produit par le Sinus droit, on aura dans le Quotient la Tangente du complément.

PROPOSITION II.

Fig. 17. 45. *Le rayon* CD *est moyen proportionnel entre la Tangente* AB *d'un arc* AG *& la Tangente* DE *de son complément* DG.

Je dis que ∺ AB. CD. DE.

(*a*) Calcul Littéral, N. 137.

Soit le Rectangle AF : donc CF = AB ; FB = AC = CD ; & les Triangles BCF, ECD sont équiangles, ayant un angle droit, chacun, F, D, & un angle commun en C.

Ainsi, CF. FB : : CD. DE (*a*) : or, AB = CF, & FB = CD :

Donc AB. CD : : CD. DE, ou ÷ AB. CD. DE.

46. *Eudoxe*. De-là $\frac{CD^2}{AB} = DE$, ou $\frac{CD^2}{DE} = AB$ (*b*).

Ainsi, divisant le quarré du rayon par la Tangente d'un arc, vous avez dans le Quotient celle du complément.

47. *Mais, s'il faut trouver la* Fig. 14. *Tangente* DC *d'un arc* AD, *dont l'on vous donne le Sinus* AB *précisément* . . . .

Ariste. Soit le rayon EA prolongé en C. Connoissant l'hypo-

(*a*) Géométrie, N. 150.
(*b*) Calcul Littéral, N. 139.

ténuse EA = ED, autre rayon; avec le côté AB du Triangle rectangle ABE, je connois aussi EB (*a*).

Cela posé, comme les Triangles ABE, CDE sont semblables, ayant les angles en B, D droits, & l'angle en E commun:

Je dis, EB. AB :: ED. DC; & j'ai dans le quatrième terme de la Proportion la Tangente DC.

48. Enfin, faut-il *construire* la Table des Tangentes?

1°. Je prens les Sinus droits
* N. 39. 40. 41. des arcs *, & les Sinus des com-
* N. 13. plémens *.

2°. Je multiplie le rayon par le Sinus d'un arc; & divisant le produit par le Sinus du complément, j'ai dans le Quotient la Tangente
* N. 43. de l'arc *.

3°. Je divise le quarré du rayon

(*a*) Géométrie, N. 204.
(*b*) Ibid. N. 133.

par la Tangente d'un arc ; & le Quotient est la Tangente du complément *. *N. 43.

Ou bien, je multiplie le rayon par le Sinus du complément, & divisant par le Sinus droit, j'ai la Tangente du complément *. *N. 44.

Encore quelques Propositions & quelques Problèmes ; & nous aurons de même la Table des Sécantes.

PROPOSITION I.

49. *Un angle, aussi-bien que l'arc qui en est la mesure, a son Sinus total, sa Tangente, sa Sécante.*

Soit l'angle B, l'arc AC, mesure de l'angle B. Fig. 19.

1°. Le côté BC est rayon de l'arc AC, ou Sinus total.

2°. Tirez DC perpendiculaire sur l'extrémité C du rayon ; c'est la Tangente de l'arc AC, ou de l'angle B *. * N. 7.

Enfin, le côté BA prolongé en D est la Sécante *. * N. 8.

PROPOSITION II.

Fig. 19. 50. *Le Sinus total* BC, *la Tangente* CD *d'un arc* AC, *& la Sécante* BD, *font un Triangle rectangle* DBC.

L'angle en C fait par la Tangente CD, & le Sinus total ou
* N. 7. le rayon BC est droit* : donc le Triangle BDC est rectangle (*a*).

Fig. 20. 51. Ainsi, 1°. Faut-il trouver la Sécante AB d'un arc CD, dont vous ayez la Tangente BC ? Joignez la Tangente BC & le rayon AC par la Sécante AB ; & c'est un Triangle rectangle (*a*) dont vous connoissez les deux côtés, AC rayon, & BC Tangente. Prenez la racine du quarré de la Sécante, ou de l'hypoténuse AB, égal à la somme des quarrés des côtés BC, AC (*b*) : & ce sera la Sécante AB.

(*a*) Géométrie, N. 120.
(*b*) Ibid. N. 204.

52. 2°. S'il faut trouver la Sécante AB d'un arc dont l'on a le Sinus ED, le Sinus ED donnera la Tangente BC* ; or ayant la Tangente BC avec le rayon, l'on a l'hypoténuse AB, qui est la Sécante (a). Fig. 20. *N. 47.

PROPOSITION III.

53. *Le rayon* AB = AD *est moyen proportionnel entre le Sinus droit* BC *d'un arc* BG *& la Sécante* AE *du complément* BD. Fig. 21.

Je dis que ∺ BC. AB. AE.

Les Triangles ABF, AED sont semblables, & BC = AF*. *N. 42.

Donc AF. AD : : AB. AE (b) : or BC = AF, & AB = AD : donc ∺ BC. AB. AE.

Ce qui va nous donner la résolution de quelques Problèmes.

(a) Géométrie, N. 204.
(b) Ibid. N. 150.

PROBLÉME I.

Fig. 21. 54. *Connoissant le Sinus droit* BC *d'un arc* BG *avec le rayon* AB, *trouver la Sécante* AE *du complément* BD.

Comme le rayon est moyen proportionnel entre le Sinus droit d'un arc, & la Sécante du complément *, divisant le quarré du rayon par le Sinus droit, nous aurons dans le Quotient la Sécante du complement (*a*).

* N. 53.

EUDOXE. Puisque ∴ BC. AB. AE, $\frac{\overline{AB}^2}{BC} = AE$ (*b*).

ARISTE. Rien de plus précis.

PROBLÉME II.

Fig. 21. 55. *Connoissant le Sinus* BF *du complément* BD *d'un arc* BG ; *trouver la Sécante* AH *de cet arc* BG.

AC = BF. AB : : AG = AB. AH;

(*a*) Calcul Littéral, N. 139.
(*b*) Ibid. N. 139.

AH, à cause des Triangles semblables ACB, AGH.

Donc ∺ BF. AB. AH. Donc

$\frac{\overline{AB}^2}{BF} = AH.$

Ainsi, divisant le quarré du rayon AB par le Sinus BF du complément, nous aurons dans le Quotient la Sécante AH.

D'ailleurs, tout arc au-dessous de 90 dégrés est complément; un Sinus droit est Sinus du complément, & au contraire.

Ainsi, en général, si l'on divise le quarré du rayon par le Sinus d'un arc moindre que le quart de cercle, on a la Sécante de l'autre arc, qui est complément au quart.

PROBLÉME III.

56. *Connoissant le Sinus droit* BC *d'un arc* BG, *avec le rayon* AB; *trouver la Sécante* AH *de cet arc, indépendamment de la Tengente.*

Le Sinus droit BC de l'arc BG me donne le Sinus BF du com-
*N. 13. plément *.

Or ayant le Sinus du complément d'un arc, j'ai la Sécante de
*N. 54. cet arc *.

Probléme IV.

57. *Construire enfin la Table des Sécantes.*

Je prens le quarré du rayon ; & divisant ce quarré par les Sinus droits, ou par les Sinus des com-
*N. 54. 55. 56. plémens, j'ai les Sécantes *.

58. *Eudoxe.* L'on a des Tables des Sinus, des Tangentes & des Sécantes ; mais quelquefois on les a sans sçavoir en faire usage.

Ariste. Les voilà justement ; & vous voulez, Eudoxe, que je m'explique encore sur la manière de s'en servir.

Hé bien, 1°. Le commencement de ces Tables regarde les

angles qui ont pour mesure des minutes précisément depuis 1′ jusqu'à 60′ inclusivement, ayant pour titre de la page, *dégrés* 0; pour titres des colonnes verticales, *Minutes*, *Sinus*, *Tangentes*, *Sécantes*. La colonne des minutes les exprime par des chiffres disposés en progression Arithmétique; la colonne des Sinus exprime le nombre des parties contenuës dans le Sinus de chaque angle de tant de minutes; la colonne des Tangentes, le nombre des parties des Tangentes, &c.

2°. Les autres pages des Tables regardent les angles, qui ont pour mesure des dégrés seulement, ou des dégrés avec des minutes. Ces pages ont pour titre général tant de dégrés, par exemple, 89 *dégrés*, 88 *dégrés*, &c. pour titres des colonnes, *Minutes*, *Sinus*, *Tangentes*, *Sécantes*.

Les rangs horisontaux qui n'ont

point de minutes à côté, regardent les angles qui ont pour meſure des dégrés ſans minutes; les autre rangs, les angles qui ont pour meſure des dégrés avec quelques minutes.

3°. Chaque nombre des dégrés & des minutes d'une Table eſt le complément des dégrés & des minutes correſpondants de la Table oppoſée; par exemple, ſi l'on a le Sinus de 84 dégrés, 50', & qu'on cherche ſon complément & le Sinus du complément; dans la Table oppoſée, vis-à-vis 50 minutes, on trouve au rang des minutes, 10 minutes, & au haut de la page, 5 dégrés. Les 5 dégrés avec les 10', ſont le complément de l'angle de 84°. 50'. Les parties du Sinus placées vis-à-vis les 10' au même rang, c'eſt-à-dire, ... 900532, ſont la valeur du Sinus du complément; ou d'un angle de 5 dégrés 10'.

Cela posé ; faut-il trouver par le moyen des Tables, le Sinus, la Tangente & la Sécante d'un angle de tant de minutes ?

Je cherche dans les pages qui ont pour titre *dégrés* o, & dans la colonne des minutes, le nombre qui exprime la grandeur de l'angle ; & je trouve vis-à-vis, son Sinus, sa Tangente, & sa Sécante. S'il s'agit d'un angle de 15', par exemple ; je cherche 15 dans la colonne des minutes..... ; & je trouve vis-à-vis, dans la colonne des Sinus 436-33 pour le Sinus ; dans la colonne des Tangentes, &c.

Faut-il trouver le Sinus, la Tangente, la Sécante d'un angle de tant de dégrés précisément ?

Je cherche la page dont le titre exprime les dégrés de l'angle ; si l'angle est de 30 dégrés ; je cherche la page qui a pour titre 30 dégrés..... ; & je trouve au pre-

mier rang horisontal dans la colonne des Sinus 50000.00 pour le Sinus ; dans la colonne des Tangentes, 57735.03, pour les Tangentes, &c.

Faut-il trouver le Sinus, &c. de tant de dégrés & de minutes?

Dans la page dont le titre exprime les dégrés de l'angle, je descens jusqu'à l'endroit de la colonne des minutes, où le nombre des minutes de l'angle se rencontre; & je trouve vis-à-vis, ce que je cherchois. Si l'angle est de 30°, 15', dans la page qui a pour titre 30 *dégrés*, je cherche 15 dans la colonne des minutes; & vis-à-vis de 15, je trouve.... 50377.40 pour le Sinus, &c.

Ayant les Sinus, les Tangentes, les Sécantes, faut-il trouver la valeur des angles?

1°. Je cherche ces Sinus, &c. dans les Tables.

2°. J'observe le titre au haut de

la page, & le nombre des minutes qui répond au Sinus, &c. & ce titre & ce nombre expriment la valeur de l'angle.

Que le Sinus soit ... 50377.40: je trouve 50377.40 parmi les Sinus, dans la page qui a pour titre 30 *dégrés*, & vis-à-vis de 15': ainsi l'angle est de 30°, 15'.

Enfin, connoissant le Sinus ou la Tangente d'un angle, faut-il trouver encore par le moyen des Tables la Sécante?

La Sécante est dans le rang horisontal du Sinus & de la Tangente.

On trouvera de même la Tangente, ayant le Sinus ou la Sécante; & le Sinus, ou la Sécante, ayant la Tangente.

Si ce détail vous a paru un peu long, Eudoxe, pourquoi m'y engagiez-vous? L'usage des Sinus nous fournira quelque chose de plus amusant.

III. ENTRETIEN.

Sur l'usage des Sinus, des Tangentes & des Sécantes.

EUDOXE. IL me semble, Ariste, que vous nous avez annoncé des Problêmes intéressants.

ARISTE. Problêmes, qui détermineront les distances, & qui peuvent servir à corriger les erreurs des Sens, qui réduisent à si peu de chose la vaste étendue des Cieux; mais il faut que quelques Propositions préviennent les Problêmes.

EUDOXE. Suivons le fil de vos idées, & l'ordre des figures si fidéles à vous les tracer.

ARISTE. Je commence.

PROPOSITION I.

59. *Dans un Triangle, le Sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle, comme le Sinus d'un autre angle est au côté opposé à cet autre angle.*

Soient ABC, Triangle inscrit au cercle; DE, DF, DG, perpendiculaires, qui passant par le centre D, coupent les côtés AB, BC, CA, par le milieu H, I, K & les arcs par le milieu E, F, G (*a*); DA, DB, DC, rayons. Fig. 22.

L'angle au centre ADE = ACB inscrit, qui a pour mesure aussi l'arc AE, moitié de l'arc AEB (*b*), & par conséquent l'angle BDF = BAC, & l'angle ADG = ABC.

Or AH est Sinus de l'angle ADE; BI, de l'angle BDF; AK, de l'angle ADG, étant perpendi-

(*a*) Géométrie, N. 60. 57.
(*b*) Ibid. 93. 114.

culaire sur le rayon DE, DF, ou
* N. 3. DG*, ou moitié de AB, de BC, de AC. Donc AH est Sinus de l'angle ACB; BI, de l'angle BAC; AK, de l'angle ABC.

Cela posé; je dis que AH. AB :: BI. BC :: AK. AC.

AH est moitié de AB; BI, de BC; AK, de AC: donc AH. AB :: BI. BC :: AK. AC.

60. De-là, 1°. Dans un Triangle, un côté est au Sinus de l'angle opposé, comme un autre côté est au Sinus de l'angle opposé à cet autre côté.

Car si AH. AB :: BI. BC :: AK. AC; en raison inverse, AB. AH :: BC. BI :: AC. AK (a).

61. 2°. Les côtés sont comme les Sinus:

Car si AB. AH :: BC. BI, &c. en raison alterne, AB. BC :: AH. BI, &c.

62. 3°. Dès qu'un Sinus est au

(a) Géométrie, N. 144.

côté opposé à un angle, comme un autre Sinus est au côté opposé à un autre angle du même Triangle, le premier Sinus est Sinus du premier angle; le second du second.

Si le Sinus qui est le 4e. terme de la proportion, ne se trouve pas éxactement dans les Tables, on prend le plus approchant, la différence étant insensible.

PROPOSITION II.

63. *Dans le Triangle obtus-angle* HIG, *le Sinus du supplément* IHK *peut être regardé comme le Sinus de l'angle obtus* GHI. Fig. 23.

1°. J'abaisse la perpendiculaire IK.

2°. Je décris avec même ouverture de Compas les arcs LN, MO: donc GL = HM.

3°. Je tire la perpendiculaire LP, Sinus de l'angle en G*, & MR, Sinus du supplément IHK. *N. 3.

Les Triangles GIK, GLP

ſont ſemblables (*a*), ayant un angle droit, chacun, en K, P, & un angle commun G; les Triangles IHK, MHR le ſont par la même raiſon.

Cela poſé; MR eſt Sinus de l'angle obtus GHI, ſi MR. GI :: LP. HI *; & MR. GI :: LP. HI, ſi MR × HI = GI × LP (*b*): car lorſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, les racines ſont réciproquement proportionnelles.

* N. 62.

Il ſuffit donc de prouver que MR × HI = GI × LP.

A cauſe de Triangles ſemblables, IHK & MHR, GIK & GLP.

1°. IK. MR :: HI. HM (*c*): donc MR × HI = IK × HM (*d*).

2°. IK. GI :: LP. GL = HM par la conſtruction: donc GI × LP = IK × HM.

(*a*) Géométrie, N. 134.
(*b*) Calcul Litteral, N. 141.
(*c*) Géométrie, N. 150.
(*d*) Calcul Litteral, N. 135.

Or deux grandeurs égales à une troisième sont égales entr'elles : donc $MR \times HI = GI \times LP$.

PROPOSITION III.

64. *Connoissant deux angles & un côté dans un Triangle, on connoît le reste.*

1°. L'on connoît le troisième angle (*a*).

2°. Connoissant les trois angles, on connoît leurs Sinus *. *N. 58.

3°. Quand on connoît les trois Sinus & un côté, l'on connoît les deux autres côtés par une regle de trois (*b*) : car comme le Sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle, ainsi le Sinus d'un autre angle est au côté opposé à cet autre angle ; & c'est connoître le reste.

PROPOSITION IV.

65. *Connoissant dans un Trian-*

(*a*) Géométrie, N. 122.
(*b*) Calcul Littéral, N. 137.

BC pris pour rayon, eſt à l'hypoténuſe AC, comme le Sinus total à la Séçante AC.

Cela poſé;

PROPOSITION V.

Fig. 24. 66. *Connoiſſant les deux côtés* BC, AB *d'un Triangle rectangle* ABC, *on aura par le moyen de la Tangente les angles* ACB, BAC *ſur la baſe, & leurs Sinus.*

1°. Connoiſſant les côtés BC, AB, on connoît la *Tangente* de l'angle ACB, en diſant : BC. *N. 65. AB :: Sinus total. Tangente*, or connoiſſant la Tangente de *N. 58. l'angle, on connoît l'angle *.

2°. Connoiſſant l'angle ACB avec l'angle droit ABC, l'on connoît l'autre angle BAC ſur la baſe.

Enfin, ayant les angles on a *N. 58. les Sinus *.

PROPOSITION VI.

Fig. 24. 67. *Connoiſſant un côté d'un Triangle*

Triangle rectangle ABC *avec la base* AC, *on aura par le moyen de la Sécante l'angle compris* ACB.

Connoissant un côté BC avec la base AC, on connoît la Sécante en disant: BC. AC: : Sinus total. Sécante*: or ayant la Sécante d'un angle, on a l'angle*. *N. 65. *N. 58.

68. EUDOXE. *Connoissant les deux côtés d'un Triangle rectangle, on aura, ce semble, les angles sur la base indépendemment de la Sécante ou de la Tangente.*

ARISTE. Prenez la racine de la somme des quarrés des deux côtés connus; vous aurez dans la racine, l'hypoténuse; or connoissant les trois côtés avec un angle, c'est-à-dire, avec l'angle droit; on a le reste*. *N. 45.

EUDOXE. Ici, Ariste, il me semble que la foule des Problêmes dont vous parliez, vient s'offrir dans les figures qui frapent mes yeux.

ARISTE. Nous essayerons de les résoudre ces Problêmes, dans l'ordre où ils se présenteront.

PROBLÉME I.

69. EUDOXE. *Hé bien, connoissant dans un Triangle deux angles & un côté, trouver les deux autres côtés.*

ARISTE. 1°. Connoissant deux angles, je connois le troisième
N. 58. & par conséquent les trois Sinus.

2°. Je dis : comme le Sinus de l'angle opposé au côté connu est à ce côté, ainsi le Sinus opposé au second, ou au troisième côté est à ce côté.

Fig. 25. Comme le Sinus de l'angle A, qui est de 40 dégrés, par éxemple, est au côté opposé BC de 15 Toises; ainsi, le Sinus de l'angle B, qui est de 60 dégrés, au côté AC; ainsi le Sinus de l'angle C au côté
N. 59. AB; & le quatrième terme de la proportion est un côté cherché.

PROBLÉME II.

70. EUDOXE. *Connoissant deux côtés* EF=20 *Toises*, *&* DF=26 *Toises*, *avec un angle* D=50°. *opposé à un côté connu* EF; *trouver les deux autres angles* E, F, *&* *le troisième côté* DE. Fig. 26.

ARISTE. Je dis 1°. Comme le côté EF est au Sinus de l'angle D connu, ainsi le côté DF au Sinus de l'angle E *: voilà le second angle E connu, & par conséquent le troisième, avec les trois Sinus *. *N. 60. *N. 64.

2°. Comme le Sinus de l'angle D est au côté EF, ainsi le Sinus de l'angle F au côté DE : & voilà le côté DE connu de même.

PROBLÉME III.

71. EUDOXE. *Connoissant deux côtés* AB, AC *avec un angle aigu* BAC *compris entre les deux côtés*; *trouver le reste du Triangle* ABC. Fig. 27.

ARISTE. 1°. Du sommet B de

l'un des angles inconnus, je tire une perpendiculaire BD sur la base AC; & j'ai deux Triangles rectangles BAD, BCD (*a*).

2°. Connoissant le côté AB du premier Triangle BAD, avec l'angle donné A, & l'angle droit ADB, je connois les trois angles & un côté d'un Triangle; & par conséquent les trois côtés AB, *N. 65. AD, BD *.

3°. Du côté connu AC, j'ôte AD connu: reste DC connu, comme BD.

4°. connoissant les deux côtés DC, BD du Triangle BCD, rectangle en D, je connois l'hypoténuse BC *: voilà les trois côtés *N. 68. AB, AC, BC du Triangle ABC connus avec un angle BAC.

Enfin, je dis: comme le côté BC est au Sinus de l'angle connu A, ainsi le côté AB au Sinus de l'angle ACB. Voilà le second an-

(*a*) Géométrie, N. 95.

gle [illegible] connu, & par conséquent le troisième CBA; & c'est tout le Triangle.

PROBLÉME IV.

72. EUDOXE. *Connoissant dans un Triangle* ACB *deux côtés* AB, BC, *& un angle obtus* ABC *compris entre ces côtés; trouver le reste.* Fig. 28.

1°. Sur AB prolongé, j'éleve la perpendiculaire CD (*a*).

2°. Connoissant l'angle donné ABC, je connois le suplément CBD (*b*), & comme l'angle en D est droit (*c*), je connois les trois angles du Triangle rectangle BCD avec le côté donné BC; & voilà les côtés CB, BD connus*. *N. 64.

3°. Au côté donné AB, j'ajoute BD; & je connois AD.

4°. Connoissant les côtés AD & CD du Triangle ADC rectan-

(*a*) Géométrie, N. 28.
(*b*) Ibid. N. 97.
(*c*) Ibid. N. 95.

gle en D, je connois l'hypoténu-
*N.68. se AC *; & j'ai les trois côtés du
Triangle ACB avec l'angle obtus
ABC.

5°. Je prens pour Sinus de l'angle obtus, celui de son suplément
*N.63. CBD *.

Enfin, ayant les trois côtés avec le Sinus d'un angle, j'ai les
*N.65. deux autres angles *.

PROBLÉME V.

Fig.29. 73. *EUDOXE. Connoissant dans un Triangle obtusangle* ABC *deux côtés* AB = 18 *Toises*, BC = 12, *avec l'angle obtus* ACB = 120 *dégrés, non compris entre les côtés connus; trouver le reste.*

ARISTE. 1°. Je prolonge un côté AC de l'angle obtus, & prens le Sinus du suplément BCD pour
*N.63. le Sinus de l'angle obtus ACB *.
Ce suplément est de 60 dégrés, puisque l'angle obtus ACB est de 120 dégrés dans l'hypothèse.

2°. Je dis : si le côté AB = 18 Toises, par exemple, donne tant de parties pour le Sinus de l'angle ACB de 60 dégrés, combien le côté BC = 12 Toises, pour le Sinus de l'angle A ? ou comme le côté AB = 18 toises est au Sinus du suplément BCD, ainsi BC = 12. Toises au Sinus de l'angle A*. *N.60.

Connoissant enfin, deux angles & par conséquent le troisième avec deux côtés, je connois le troisième côté*. *N.64.

PROBLÉME VI.

74. *EUDOXE. Connoissant la base* BC *& un angle* BCD *sur la base d'un Triangle rectangle ; trouver le reste.* Fig. 30.

ARISTE. Connoissant la base BC & un angle BCD sur la base avec l'angle droit BDC connu, je connois les trois angles & un côté ; & par conséquent le reste *. *N.64.

Je dis : si le Sinus de l'angle

droit BDC, ou le Sinus total donne tant de Toises, par éxemple, pour la base BC; combien le Sinus de l'angle BCD, ou CBD sur la base, pour le côté opposé? Le quatrième terme de la proportion est le côté opposé BD, ou BC.

Fig. 30. 31. 75. *Eudoxe. Connoissant la base BC d'un Triangle rectangle avec un côté BD; l'inverse, pour ainsi dire, vous donnera le reste.*

Vous direz: si la base BC = 37 Toises, par éxemple, donne tant de parties pour le Sinus de l'angle droit opposé; combien le côté BD = 22, par éxemple? Vous aurez dans le quatrième terme de la proportion, le Sinus du second angle C, & par conséquent le

N. 58. second angle, &c.

Probléme VII.

Fig. 31. 76. *Mesurer la distance AB d'un objet, d'une Tour inaccessible BC.*

Ariste. Je plante un Piquet au point

point A ; & avançant ſur le terrein par une ligne AD qui faſſe un angle avec AB, diſtance de la Tour, je plante un autre piquet au point D.

2°. Du point D, dirigeant la baſe d'un demi-cercle vers A, & l'Alidade ou la Regle mobile, vers B, ou ce qui revient au même, avec un Graphométre, je meſure l'angle ADB.

3°. Ayant meſuré la diſtance des piquets A, D, ce qui s'appelle prendre AD pour baſe, je meſure au point A l'angle BAD.

Et je connois dans le Triangle DAB deux angles BAD, ADB, & par conſéquent le troiſième ABD, avec les trois Sinus *, & un côté AD. *N. 59. & 53.

Enfin, je dis : comme le Sinus de l'angle ABD eſt au côté AD, ainſi le Sinus de l'angle ADP eſt au côté AB * ; & le quatrième terme eſt la valeur de la diſtance AB. *N. 59.

PROBLÉME VIII.

Fig. 31. 77. *EUDOXE. Trouver la hauteur BC d'une Tour inaccessible, mais sur un Plan.*

ARISTE. 1°. Je prens la distan-
* N.76. ce AB *.

2°. Du point A, dirigeant l'Alidade de mon demi-cercle vers la cime C de la Tour, & la base vers le pied B, je mesure l'angle BAC formé par mon rayon visuel AC & la distance AB.

Et connoissant dans le Triangle ACB, l'angle BAC avec l'angle droit ABC, je connois tous les angles avec un côté AB.

Enfin, je dis : comme le Sinus de l'angle ACB est au côté AB, ainsi le Sinus de l'angle BAC au
* N. 59. côté BC * : & je connois BC, hauteur de la Tour.

PROBLÉME IX.

Fig. 32. 78. *EUDOXE. Mesurer la lar-*

geur AC d'une Riviere.

ARISTE. Je trouve cette largeur ou la diſtance AC des bords de la Riviere, comme j'ai trouvé la diſtance AB de la Tour inacceſſible *. *N. 76.

1°. Du point A de l'un des bords, dirigeant la baſe de mon demi-cercle vers un autre point B du même bord, & l'Alidade vers un point C ſur l'autre bord vis-à-vis, je meſure l'angle en A.

2°. Du point B, dirigeant la baſe de l'inſtrument vers A & l'Alidade vers C, je prens l'angle en B.

3°. Je toiſe la diſtance AB.

Voilà deux angles A, B, & un côté AB connus dans le Triangle ABC. J'aurai donc la diſtance AC, en diſant : ſi le Sinus de l'angle C donne tant de Toiſes pour le côté AB ; combien le Sinus de l'angle B pour le côté ou la diſtance AC ?

PROBLÉME X.

Fig. 33. 79. *EUDOXE. Mesurer la profondeur* AB *d'un Puits vuide* AD.

ARISTE. Je trouve la profondeur du Puits comme la hauteur de la Tour *. *N. 77.

Je prens d'abord le diamétre AC de la largeur.

Ensuite, je mesure l'angle ACB formé par le rayon visuel CB & diamétre AC.

Enfin, connoissant l'angle ACB avec l'angle droit BAC & le côté AC, je connois le Triangle ABC, & par conséquent le côté, ou la profondeur AB.

PROBLÉME XI.

Fig. 34. 80. *EUDOXE. Trouver la hauteur* AB *d'une Montagne* ABF.

ARISTE. Du point D, à quelque distance du pied F de la Montagne, dirigeant la base de l'instrument parallelement à l'horison,

& l'Alidade vers la cime A, je prens l'angle ADB fait par l'Alidade & la base.

2°. Ayant mesuré la distance DC, de 10 Toises, par éxemple, j'opére de même en C, & je prens l'angle ACD.

Voilà les deux angles ADC, ACD avec le côté DC connus dans le Triangle CAD, & par conséquent le côté AC*. *N. 64.

Enfin, connoissant l'angle ACB, suplément de ACD & l'angle droit ABC, avec le côté AC du Triangle BAC, je connois la hauteur AB de la Montagne.

PROBLÉME XII.

81. EUDOXE. *Trouver la distance DE, ou CE de la cime, & la hauteur AE d'une Tour située sur le sommet d'une Montagne ABF.* Fig. 34.

ARISTE. 1°. Du point D & du point C, je dirige l'Alidade vers la cime E, & la base de l'instru-

*N. 80. ment vers B, comme j'ai fait *; & connoissant de même les angles EDC, ECD, avec le côté DC du Triangle CED, je connois DE, ou CE.

2°. Connoissant le suplément de l'angle connu ECD & l'angle droit B avec le côté CE, je con-
*N. 80. nois la hauteur commune BA + AE *.

*N. 80. Enfin, de BA + AE, ôtez BA connu *, reste AE.

PROBLÉME XIII.

Fig. 35. 82. EUDOXE. *Connoissant la hauteur d'une Montagne, trouver le diamétre AC de la Terre.*

ARISTE. 1°. De la cime B, je regarde le point D qui borne ma vûe dans la surface de la Terre; & à la faveur d'un instrument garni de son plomb, j'observe l'angle ABD formé par la Tangente ou le rayon visuel BD & la hauteur
*N. 80. connue AB de la Montagne *.

2°. Je prens la longueur de la Tangente ou la distance BD *. *N. 81.

3°. La Sécante étant à la Tangente, comme la Tangente à la partie extérieure de la Sécante (a); $\div$ BC. BD. AB. Donc $\frac{BD^2}{AB} =$ BC (b).

Ainsi, je divise le quarré de BD ou du rayon visuel par la hauteur AB de la Montagne; & le Quotient est la valeur de BC, ou de AB + AC.

Enfin de BC = AB + AC, j'ôte AB, qui est la hauteur de la Montagne : & le reste AC est le diamétre de la Terre.

83. *Eudoxe*. Portons nos regards plus haut encore que la cime de la Montagne.

PROBLÉME XIV.

Trouver l'élevation EL *d'un Nua-* Fig. 36.

(a) Géométrie, N. 160.

(b) Calcul Littéral, N. 139.

ge immobile sur un endroit inaccessible L.

ARISTE. 1°. Ayant observé en F & en I, & mesuré les angles IFE, EIF & la distance IF, je connois le côté EI du Triangle
N. 80. FEI.

2°. Je connois l'angle EIL, suplément de l'angle connu EIF, & l'angle droit ELI.

Or connoissant dans le Triangle IEL deux angles avec un côté, je connois l'élevation EL.

EUDOXE. Elevons-nous au-dessus des Nuages mêmes.

PROBLÉME XV.

84. *Mesurer la distance de la Lune à la Terre.*

ARISTE. Soient G, la Lune sous
Fig. 37. l'Equateur ; AEG ligne droite supposée tirée du centre A de la Terre au centre G de la Lune ; B, un Observateur à Paris, par éxemple ; BG, rayon visuel ; EB, arc du grand cercle de la

Terre EBF, arc, dis-je connu = 49 dégrés, par éxemple; AB, demi-diamétre terrestre connu (a); CD, Tangente & diamétre de l'Horison sensible, faisant avec le demi-diamétre AB un angle droit ABD *; DBG, angle fait par le diamétre DB de l'Horison & le rayon visuel BG, & mesuré par l'Observateur B. *N.7.

Ainsi, dans le Triangle GAB, l'on connoît, 1°. L'angle BAG = BAE, qui a pour mesure l'arc EB connu. 2°. L'angle obtus ABG, formé de l'angle droit ABD, & de l'angle DBG mesuré. 3°. Le côté AB.

Or connoissant deux angles & un côté, on connoît le reste *. *N.64.

Je dis donc : si le Sinus de l'angle en G donne tant de lieuës pour le demi-diamétre AB de la Terre, combien le Sinus du suplément de l'angle obtus ABG, pour le côté

(a) Géométrie, N. 399.

N. 63. AG ? Voilà donc AG connu.
& 59. De AG, ôtez AE, demi-diamétre terrestre : reste EG = 90000 Lieuës, environ, distance de la Lune à la Terre.

Enfin, je dis : si le Sinus de l'angle G donne tant pour le côté AB, combien le Sinus de l'angle BAE pour le côté BG ? & je connois BG, distance de la Lune à Paris.

85. EUDOXE. *Essayerons-nous de mesurer la distance même AB de la Terre au Soleil ?*

ARISTE. Il y en a qui s'y prennent de la sorte, ou à peu près :

Fig. 38. Soient A le Soleil ; B, un Observateur sur la Terre ; C, la Lune demi-pleine ; BC, distance
N. 84. connue de la Lune à la Terre.

1°. Le rayon AC qui va du centre du Soleil au centre C du disque de la Lune, est perpendiculaire sur le rayon visuel BC : car si le rayon AC étoit incliné en en

haut, comme GC, la Lune ne paroîtroit pas demi-pleine à l'Observateur B, puisque la partie ICK ne paroîtroit pas. Si le rayon AC étoit incliné en en bas, comme HC, la Lune paroîtroit plus que demi-pleine, puisque la partie FCK paroîtroit.

Ainsi, l'angle ACB est droit.

2°. L'angle B formé par les deux rayons visuels de l'Observateur, observant la Lune & le Soleil, est presque droit aussi; & l'angle en A se trouve à peine de 6'' ou 10''.

Ainsi, connoissant les angles C, B, A, du Triangle ABC, avec un côté BC, qui est la distance de la Terre à la Lune; on dit: si le Sinus de l'angle A donne tant de Lieuës pour le côté BC, combien le Sinus de l'angle C pour le côté AB? & le quatrième terme de la Proportion est la distance AB de la Terre au Soleil.

EUDOXE. Et c'en eſt bien aſſez, Ariſte, pour voir votre penſée ſur la maniére de prendre les diſtances.

ARISTE. Voulez-vous, Eudoxe, que ſans nous élever ſi haut, nous meſurions dans un entretien particulier les Plans irréguliers ?

EUDOXE. Très-volontiers.

IV. ENTRETIEN.

Sur la meſure des Plans irréguliers.

ARISTE. POUR meſurer nos Plans, Eudoxe, nous avons beſoin de la lumière de quelques Propoſitions qui demandent de l'attention.

EUDOXE. Mon attention n'eſt pas épuiſée ; & vous ſçavez, Ariſte, que lorſqu'il s'agit de vous voir déveloper des vérités certaines, rien ne me fatigue.

ARISTE. Suivons donc notre Syſtême.

PROPOSITION I.

86. *Dans un Triangle* BCD, *la ſomme de deux côtés inégaux* BC, CD, *eſt à leur différence, comme la Tangente de la moitié de la ſomme des deux angles* CBD, CDB, *opposés à ces deux côtés, eſt à la Tangente de la moitié de la différence de ces angles.* Fig. 39.

1°. Du ſommet C, intervalle CD, je décris un cercle DEF, & prolonge l'autre côté CB en F & en E. BE = CB + CD, puiſque CE = CD; & BF eſt la différence de CB, CD, puiſque CB + BF = CD, rayon.

2°. Joignez F, D, plus D, E: l'angle FDE eſt droit (*a*) étant inſcrit & appuyé ſur le diamétre FE;

(*b*) Géométrie, N. 115.

donc DE est perpendiculaire sur FD (a).

3°. De F, je décris, l'arc DH: donc DE, Tangente de l'arc DH*, l'est de l'angle DFE. * N. 7.

4°. De D, décrivez l'arc FI, & tirez FG parallele à la perpendiculaire DE sur le prolongement BG de DB: donc FG étant perpendiculaire, aussi-bien que DE parallele, est Tangente de l'arc FI, ou de l'angle FDI = FDB.

5°. Cela posé; l'angle extérieur DCE vaut la somme des deux intérieurs opposés CBD, BDC (b): donc l'angle inscrit DFE, moitié de l'angle au centre DCE (c), est moitié de la somme des angles CBD, BDC: donc DE, Tangente de l'angle DFE, l'est de la moitié de la somme des angles CBD, BDC.

(a) Géométrie, N. 96.
(b) Ibid. N. 129.
(c) Ibid. N. 116.

6°. Le Triangle DCF est isoscele, puisque CF = CD : donc l'angle CFD = CDF (*a*) : ainsi, l'angle extérieur CBD = BFD + BDF, & BFD = BDC + BDF : donc l'angle CBD = BDC + 2BDF : donc 2BDF est la différence des angles CBD, BDC.

Donc l'angle BDF ou IDF est moitié, & par conséquent, FG Tangente de la moitié de la différence des angles CBD, BDC.

De-là, il suffit de prouver que BE. BF : : DE, FG.

Or l'angle BFG = BED alterne (*b*) ; l'angle FBG = DBE opposé au sommet, & par conséquent l'angle BGF = BDE : donc les deux Triangles BGF & BED sont semblables (*c*) : donc ayant leurs côtés homologues propor-

(*a*) Géométrie, N. 127.
(*b*) Ibid. N. 101.
(*c*) Ibid. N. 133.

tionnels (*a*), BE. BF :: DE. FG.

PROPOSITION II.

87. *Dans un Triangle* BCD, Fig. 40. *dont l'on connoît les trois côtés, la base* BD *est à la somme des deux autres côtés* BC, CD, *comme la différence de ces deux côtés* BC, CD, *est à la différence des segmens* BE, ED *de la base coupée par une perpendiculaire* CE *abaissée du sommet* C *de l'angle opposé.*

Du sommet C, décrivez un cercle ayant pour rayon le côté CD > CB.

Prolongez l'autre côté CB de part & d'autre en F, G, jusqu'à la circonférence, aussi bien que le côté DB.

Tirez les lignes FD, GH, & la perpendiculaire CE.

1°. Puisque CF = CD, rayon, BF est la somme des deux côtés CB, CD; & BG en est la différence.

(*a*) Géométrie, N. 150.

2°. HD étant divisée en deux parties égales par la perpendiculaire CE (a), BH est la différence des deux segmens BE, ED.

Il faut donc prouver précisément que BD. BF :: BG. BH.

Or les deux Triangles BGH, BDF sont semblables (b), puisque les angles au sommet B sont égaux, & que les angles BHG, BFD, appuyés sur même arc GD le sont (c).

Donc BD. BF :: BG. BH (d).

88. EUDOXE. *On vous donne, Ariste, les trois côtés d'un Triangle* BCD; *il faut trouver la valeur d'un segment de la base coupée par la perpendiculaire abaissée du sommet.* Fig. 40.

ARISTE. Je dis : Comme la base BD est à la somme des deux autres côtés CD, CB; ainsi la différen-

(a) Géométrie, N. 60.
(b) Ibid. N. 133.
(c) Ibid. N. 115.
(d) Ibid. N. 150.

ce BG de ces deux côtés est à la différence BH des deux segmens BE, ED *; & j'ai cette différence BH dans le quatrième terme de la proportion (*a*).

*N. 87.

2°. J'ajoute la différence BH à la base connue BD; & j'ai la ligne HD.

3. Je prens la moitié de cette ligne coupée en deux parties égales par la perpendiculaire CE (*b*); & c'est le plus grand segment ED.

Enfin, ayant le plus grand segment ED de la base connue, j'ai le plus petit EB.

EUDOXE. D'ailleurs connoissant le plus grand segment, la différence connue vous donnera le plus petit.

Fig. 40. 89. *Mais connoissant les trois côtés d'un Triangle* BCD, *il faut trouver les trois angles.*

ARISTE. Hé bien; soit la per-

(*a*) Calcul Littéral, N. 137.
(*b*) Géométrie, N. 60.

pendiculaire CE abaissée du sommet C sur la base BD.

1°. Je connois un segment ED *. *N. 88.

2°. Connoissant donc dans le Triangle rectangle ECD, le côté ED, le côté donné CD, & l'angle droit CED fait par la perpendiculaire CE & opposé à ce côté, je connois l'angle DCE, & par conséquent l'angle CDE *. *N. 65.

3°. Je connoîtrai de même l'angle CBE, qui me donnera le troisième BCD.

Eudoxe. On peut dire, ce me semble, ED est à CD comme le Sinus total est à la Sécante; & connoissant ainsi la Sécante de l'angle D, on aura l'angle même*. *N. [illegible] On aura de même l'angle CBE, & par conséquent l'angle BCD.

90. *Mais il s'agit de trouver la grandeur d'un Plan triangulaire inaccessible, d'un Lac, par éxemple, dont l'on connoît les trois côtés.*

Fig. 40. *ARISTE.* Soit le Plan, ou le Lac triangulaire BCD; 1°. J'imagine une perpendiculaire CE tirée du sommet C sur la base BD, faisant avec la base un angle droit *N. 87. CED *.

2°. Je prens la valeur du plus *N. 88. grand segment ED *.

3°. Connoissant deux côtés CD, ED, & un angle du Triangle rectangle ECD, je connois *N. 65. le reste *, & par conséquent la perpendiculaire CE.

4°. Le produit de la base BD par la moitié de la perpendiculaire CE, sera la surface du Lac (a).

EUDOXE. Enfin, l'on vous donne précisément les trois côtés d'un Plan triangulaire: & il est question de trouver la surface sans le secours d'une perpendiculaire abaissée du sommet d'un angle sur la base.

ARISTE. Deux Propositions

(a) Géométrie, N. 189.

nous donneront la résolution du Problême.

PROPOSITION II.

91. *Un Plan triangulaire* ABC *est le produit de la moitié de ses trois côtés par le rayon* DE *d'un cercle* EFG *inscrit au Triangle.* Fig. 41.

1°. Je divise chacun des angles A, C, B, du Triangle ABC en deux parties égales par les lignes AD, CD, BD, & je démontre que ces lignes se rencontrent en un même point D.

Ou, ce qui revient au même, je démontre, que si du point D, auquel se rencontrent les lignes AD, CD, qui divisent les angles A, C en deux parties égales, on tire la ligne DB au sommet B de l'angle ABC, elle divisera cet angle en deux angles égaux ABD, CBD.

Du point D j'abaisse les perpendiculaires DG, DF, DE, sur les

côtés AC, CB, AB.

Les Triangles ADE, ADG ont chacun un angle droit G=E, le côté AD commun, & l'angle EAD=GAD : donc le côté AE=AG, & la perpendiculaire DE=DG.

Par la même raison les Triangles CDF, CDG auront le côté CF=CG & la perpendiculaire DF=DG.

Enfin les Triangles BDF, BDE ont le côté DF=DE, puisque DF=DG=DE, le côté DB, commun & chacun un angle droit F=E. Donc l'angle ABD =CBD *.

*N. 65.

2°. Ainsi puisque les perpendiculaires DG, DF, DE sont égales, si du point D l'on décrit un cercle qui ait une de ces perpendiculaires pour rayon, il sera inscrit au Triangle ABC; & si du même point D on tire aux sommets A, B, C, angles du Trian-

gle ABC, les lignes DA, DB, DC, elles le diviseront en trois Triangles ADB, ADC, BDC qui auront tous trois une même hauteur DE=DF=DG, rayons du cercle inscrit, & qui pris ensemble sont égaux au Triangle ABC.

3°. Enfin les trois Triangles ADB, ADC, BDC, pris ensemble, sont égaux à un Triangle qui ait, comme eux, pour hauteur le rayon ED=DF=DG, & pour base la valeur des trois côtés AB, BC, AC (a).

Or le Plan de ce Triangle est le produit de la moitié de sa base par sa hauteur; & cette moitié est la moitié des trois côtés.

Donc un Plan triangulaire est le produit de la moitié de ses trois côtés par le rayon d'un cercle inscrit.

(a) Géométrie, N. 120.
(b) Ibid. N. 180.

PROPOSITION II.

Fig. 42. 92. *La surface* ABC *d'un Triangle est égale à la racine quarrée du produit fait de la moitié de la somme des trois côtés multipliée par le produit de leurs trois différences à cette même moitié.*

Soient ABC, Triangle circonscrit (a); DE, DF, DG, rayons perpendiculaires sur AB, BC, AC; AD, BD, CD partageant

* N. 91. les angles par le milieu*; la Tangente AE = AG, BE = BF,

* Ibid. CF = CG*, AI = CG, CK = AG, IH = CK, IL perpendiculaire sur AI; BL, coupant l'angle HBK par le milieu; enfin, HL, LK, AL, CL.

Donc 1°. BI = BK, puisque BE = BF, AE = AG = CK, AI = CG = CF.

2°. BI est moitié des trois côtés AB, BC, AC: car des six par-

(a) Géométrie, N. 142.

ties

ties faites par les trois rayons, BI en contient trois, BE = BF, EA = AG, AI = CG; & BK les trois autres, BF = BE, FC = CG, CK = AG; & BI = BK.

3°. BI est formée des trois différences BE, EA, AI des trois côtés à la moitié BI de la somme des trois côtés : car BE est la différence de AC = EI à BI; EA, la différence de BC à BI, puisque BC = BI — AE; AI, la différence de AB à BI.

Cela posé; je dis que la surface triangulaire $ABC = \sqrt{BI \times BE \times AE \times AI}$.

1°. Les Triangles ILB, KLB, sont égaux, puisque le côté BI = BK, que BL est commun, & que les angles compris IBL, LBK, sont égaux, par la construction (*a*) : donc le Triangle ILB étant rectangle en I, KLB l'est en K.

(*a*) Géométrie, N. 136.

Ainsi, LK = IL est perpendiculaire sur BK.

Les deux Triangles IHL, KLC sont égaux de même, puisque IL = LK, IH = KC, & que l'angle compris HIL = CKL droit.

Donc LC = HL, comme AH = AC : donc les deux Triangles ALH, ALC, sont égaux, ayant, chacun, deux côtés égaux, & un côté AL commun (*a*) : donc ils ont leurs angles homologues égaux : donc l'angle HAL = CAL, ou IAL = LAG.

2°. Les angles en E, G, étant droits, ou faits par des perpendiculaires, les angles EDG, EAG, valent, pris ensemble, deux droits, puisque le quadrilatere AEDG vaut quatre droits (*b*) : donc les deux angles EDG, EAG, valent, pris ensemble, les deux EAG, IAG formés par l'oblique

(*a*) Géométrie, N. 134.
(*b*) Ibid. N. 175.

AG (*a*). Ainſi, ôtez de chaque côté l'angle commun EAG; reſte l'angle EDG = IAG. Donc l'angle ADE, moitié de EDG, eſt égal à l'angle IAL, moitié de IAG.

De-là, les deux Triangles AED, AIL ſont ſemblables (*b*).

Donc ED. AE :: AI. IL (*c*).
Donc ED × IL = AE × AI (*d*).

3°. Les angles E, I, étant droits, ED, IL ſont paralleles (*e*), & les Triangles BDE, BLI ſont ſemblables (*f*), car l'angle B eſt commun.

Donc BE. BI :: ED. IL (*g*).

Or ED. IL :: ED × ED. ED × IL (*h*), puiſque l'antécédent

(*a*) Géométrie, N. 97.
(*b*) Ibid. N. 133.
(*c*) Ibid. N. 150.
(*d*) Calcul Littéral, N. 135.
(*e*) Géométrie, N. 44.
(*f*) Ibid. N. 133.
(*g*) Ibid. N. 150.
(*h*) Calcul Littéral, N. 143.

d'une raison est à son conséquent ; comme le quarré de l'antécédent est au plan de l'antécédent par le conséquent. Donc BE. BI : : ED $\times$ ED. ED $\times$ IL : ou BE. BI : : $\overline{ED}^2$. ED $\times$ IL.

Mais ED $\times$ IL $=$ AE $\times$ AI : donc BE. BI : : $\overline{ED}^2$. AE $\times$ AI.

Donc BI $\times$ $\overline{ED}^2$ $=$ BE $\times$ AE $\times$ AI (*a*) : donc BI $\times$ $\overline{ED}^2$ $\times$ BI $=$ BE $\times$ AE $\times$ AI $\times$ BI (*b*) : donc $\overline{BI}^2$ $\times$ $\overline{ED}^2$ $=$ BI $\times$ BE $\times$ AE $\times$ AI.

Or la racine quarrée de $\overline{BI}^2$ $\times$ $\overline{ED}^2$ est BI $\times$ ED (*c*).

Donc BI $\times$ ED $= \sqrt{\overline{BI \times BE \times AE \times AI}}$.

Mais enfin, la surface triangulaire ABC $=$ BI $\times$ ED *. *N. 91.

(*a*) Calcul Littéral, N. 135.
(*b*) Ibid. N. 147.
(*c*) Ibid. N. 22.

Donc la surface triangulaire ABC $= \sqrt{BI \times BE \times AE \times AI}$.

PROBLÉME I.

93. *Connoissant précisément les trois côtés d'un Plan triangulaire* ABC, *en trouver la surface sans tirer une perpendiculaire du sommet d'un angle sur la base.* Fig. 42.

1°. Je prens la moitié BI de la somme des trois côtés AB, BC, AC.

2°. Je prens les différences BE, AE, AI, des trois côtés AB, BC, AC à cette moitié BI.

3°. Je multiplie ces différences BE, AE, AI, les unes par les autres; & j'ai le produit BE $\times$ AE $\times$ AI.

4°. Je multiplie la moitié de la somme des trois côtés par ce produit, c'est-à-dire, BI par BE $\times$ AE $\times$ AI; & j'ai le produit total BI $\times$ BE $\times$ AE $\times$ AI.

Enfin, je prens la racine quarrée de ce produit total; & cette racine, ou $\sqrt{BI \times BE \times AE \times AI}$, est la surface ou le Plan triangulaire qu'il falloit trouver *.

*N. 92.

EUDOXE. La résolution d'un Problême si compliqué vous en attire un autre à résoudre.

PROBLÉME II.

Fig. 43.

94. *Trouver la surface d'un Plan* ABCDEF *à la portée de la vûe, mais irrégulier, Poligone & inaccessible, dont l'on connoisse les côtés & les angles.*

ARISTE. Soit le Plan réduit en Triangles ACB, ADC, AED, AFE (*a*).

Dès que l'on connoît deux côtés d'un Triangle, & l'angle compris, on connoît le troisième côté & les autres angles *.

*N. 71. & 72.

Ainsi, 1°. Connoissant les deux

(*a*) Géométrie, N. 234.

côtés AB, BC, & l'angle compris ABC, je connois la base AC *; or connoissant les trois côtés d'un Plan triangulaire, je connois & les angles * & la surface *. *N.72. *N.89. *N.90.

2°. Connoissant l'angle BCD, & l'angle BCA, je connois l'angle ACD. Or connoissant les côtés AC & CD avec l'angle compris, je connois encore la base AD, & le Plan triangulaire ADC.

J'aurai de même les autres Plans triangulaires AED, AFE *: enfin, la somme de ces Plans sera le Plan total. *N.71. & 72.

95. *EUDOXE*. Mais si l'on connoît précisément les côtés du Poligone.....

ARISTE. On pourra prendre la base AC du Triangle ACB *; & connoissant les trois côtés AB, BC, AC, on aura la surface *. Fig.43. *N.76. *N.93.

On aura de même les autres Plans triangulaires ADC, &c.

Eſſayerons-nous, Eudoxe, de lever un Plan ou une Carte.

EUDOXE. Le plûtôt qu'il ſe pourra.

V. ENTRETIEN.

Sur la manière de lever une Carte.

EUDOXE. VOus allez donc, Ariſte, lever la Carte de quelque vaſte contrée ſans ſortir de votre Cabinet.

ARISTE. Carte en idée: en un mot, vous allez voir, du moins, une idée légere d'un art, qui dans l'enceinte d'un petit Cabinet préſente à nos yeux mille contrées différentes.

96. D'abord, qu'eſt-ce que lever la Carte d'une contrée? C'eſt

placer sur le papier divers endroits qu'elle renferme, leur donnant sur le papier les rapports des distances qu'ils ont sur le terrein : c'est réduire le grand en petit. Et on le fait en déterminant par le moyen de la Géométrie & de la Trigonométrie, la valeur des angles & des côtés des Triangles formés par les distances, & en traçant sur le papier des angles égaux aux premiers, avec des côtés plus petits, mais proportionnels.

Les angles fort obtus ou fort aigus, n'étant pas assez sensibles, on les évite.

97. Les Cartes générales ne comprennent que la figure des chemins avec la position des lieux les plus considérables. Les Cartes particulieres contiennent tout ce qui peut avoir lieu dans une Carte, les chemins, la grandeur & la figure des Villes, des Bourgs, & des Villages, les Riviéres avec

les Ponts, les Bois, les Chapelles, &c.

Fig. 44. 98. On sçait qu'Echelle est une ligne divisée en un certain nombre de parties qui disent tant de grandeurs égales, de toises, par éxemple, ou de lieuës.

99. Enfin, prendre une base, c'est faire d'une distance connue le côté d'un Triangle ou de plusieurs Triangles.

Cela supposé;

Probléme I.

100. *Lever une Carte générale.*

1°. J'établis une base, la plus grande qu'il soit possible, c'est-à-dire, que je choisis une distance qui puisse être la base ou le côté du plus grand nombre de Triangles qu'il se peut *.

*N. 99.

Fig. 45. Soient, par exemple, les points de Station B, C: je mesure la di-

ſtance BC ; & j'en fais la baſe ou le côté des Triangles que je vais employer.

2°. D'une extrémité C de la baſe BC, je prens avec un quart de cercle la grandeur des angles formés par la baſe BC & par les diſtances CD, CE, &c. des lieux. Je prens donc les angles BCN, BCD, BCE, BCF, paſſant le point G, parce que l'angle BCG ſeroit trop obtus ; puis, je prens les angles BCH, BCI, BCK, BCL, paſſant le point M, parce que l'angle BCM ſeroit trop aigu.

3°. Pour avoir la poſition des endroits N, D, E, F, &c. je coupe les rayons que j'ai tirés. Ainſi de l'autre extrémité B de la baſe BC, je prens l'angle CBF, par éxemple, fait par BC, & BF coupant le rayon CF ; & j'ai le point F : car connoiſſant dans le Triangle BCF le côté BC, & deux angles BCF, CBF, j'ai les

côtés ou les diſtances CF & BF *.

*N. 65.

4°. Coupant de même les autres rayons, je prens les angles CBE, CBD, CBN, CBH, CBI, CBK, CBL ; & connoiſſant tous les angles des Triangles formés par les rayons coupés, avec un côté commun BC, je connois tous les côtés, ou toutes les diſtances meſurées par ces côtés *.

*N. 65.

5°. Mais j'ai paſſé deux endroits G, M. Comment en trouver la poſition indépendemment de la baſe BC ?

Pour prendre G, on peut prendre pour baſe la diſtance BH, ou une autre plus convenable ; je prens le côté CF ; & après avoir pris du point C l'angle FCG, je prens du point F l'angle CFG.

Or ayant deux angles & un côté CF, dans le Triangle FGC, je connois CG & FG.

Pour trouver le point M, je

fais de même. Du point B, je prens l'angle MBN ; & du point N, l'angle BNM ; & j'ai MN & BM *. *N. 65.

6°. Quand j'ai de la ſorte la valeur de tous les côtés des Triangles, je rapporte ces côtés ſur le papier, donnant à chaque ligne ſa valeur proportionnelle par le moyen d'une Echelle *, & lui faiſant faire les mêmes angles. *N. 98.

7°. Après avoir rapporté ces poſitions, il s'agit de continuer à lever les lieux découverts des extrémités du Plan déja levé ; & je ſuis la même méthode, prenant pour baſes les extrémités connues de ce Plan. Ainſi, pour lever les endroits ſitués au-delà des points D, N, je prens pour baſe la diſtance connue DN.

PROBLÉME II.

101. *Lever une Carte particulière.*

1°. Je fais le canevas comme la Carte générale *.

* N. 101.

2°. Je réduis le Plan de chaque Ville à l'Echelle de la Carte *.

* N. 98.

3°. Je prens la grandeur, la figure & la situation des Bourgs, des Villages, des Hameaux, la forme des ruës, des Chemins avec les Montagnes des environs.

4°. S'il y a des Bois ou des Forêts, je leve d'abord les Hameaux & les Villages les plus proches, dont les distances me donnent des bases *. Ces bases font une sorte de Poligone; & je rapporte à ce Poligone un certain nombre de points qui servent à

* N. 99.

marquer les limites du Bois ou de la Forêt.

Enfin, de quelque éminence hors du Bois, je prens des points de position dans le Bois. Ces points sont des Châteaux, des Clochers ou de grands arbres. Et à la faveur de ces points, j'oriente les divers endroits du Bois, réduisant le tout par le moyen de l'Echelle *.

*N. 96. & 98.

Eudoxe. Mais, Ariste, comment prenez vous le Plan d'une Ville, ou d'une place ABCDEF, où l'on puisse entrer? Fig. 46.

Ariste. 1°. Je prens la longueur de chaque côté AB, BC, &c. avec la longueur de chaque ligne AE, EB, EC, tirée d'angle à angle.

2°. Par le moyen d'une Echelle, par éxemple de 100 parties, je rapporte en petit sur le papier ces côtés & ces lignes, faisant d'abord un petit Triangle *aef*,

qui a ſes côtés proportionnels aux côtés du grand Triangle AEF correſpondant ; puis, un autre petit Triangle *abe*, &c. & j'ai en petit une figure *abcdef*, qui eſt ſemblable à la place ABCDEF, puiſque la figure contient autant de Triangles que la place (*a*), & que les Triangles de l'une ſont ſemblables aux Triangles de l'autre (*b*) : car deux Triangles ſont ſemblables dès qu'ils ont leurs côtés proportionnels.

EUDOXE. Mais ſi c'eſt une place où l'on ne puiſſe entrer....

ARISTE. 1°. Je prens les côtés & les angles.

2°. Je rapporte ces côtés & *N.96. ces angles ſur le papier*, enſorte que les angles correſpondants ſoient égaux, & les côtés qui comprennent les angles égaux,

(*a*) Géométrie, N. 234.
(*b*) Ibid. N. 159

proportionnels ;

proportionnels ; & j'ai un Poligone *abcdef*, ſemblable à la place ABCDEF (*a*), Poligone qui pourra ſe réduire en autant de Triangles ſemblables, puiſque les Poligones ſemblables ſe réduiſent en Triangles ſemblables (*b*).

EUDOXE. Ainſi, à la lumière du Calcul, de la Géométrie & de la Trigonométrie, l'on parvient à des uſages où l'utile & l'agréable ſe rencontrent.

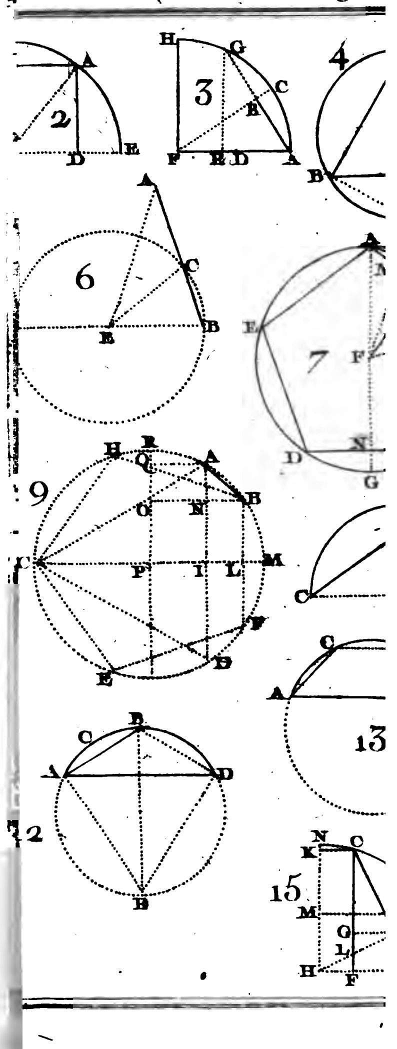
Enfin, Ariſte, vos idées ſur les Nombres, ſur le Calcul littéral, ſur la Géométrie & la Trigonométrie, m'ont paru juſtes, nettes, préciſes, ſuivies ; & avec ces lumières on peut, ce ſemble, pénétrer avec agrément dans ce qu'il y a dans les Mathématiques de plus curieux & de plus utile en même temps.

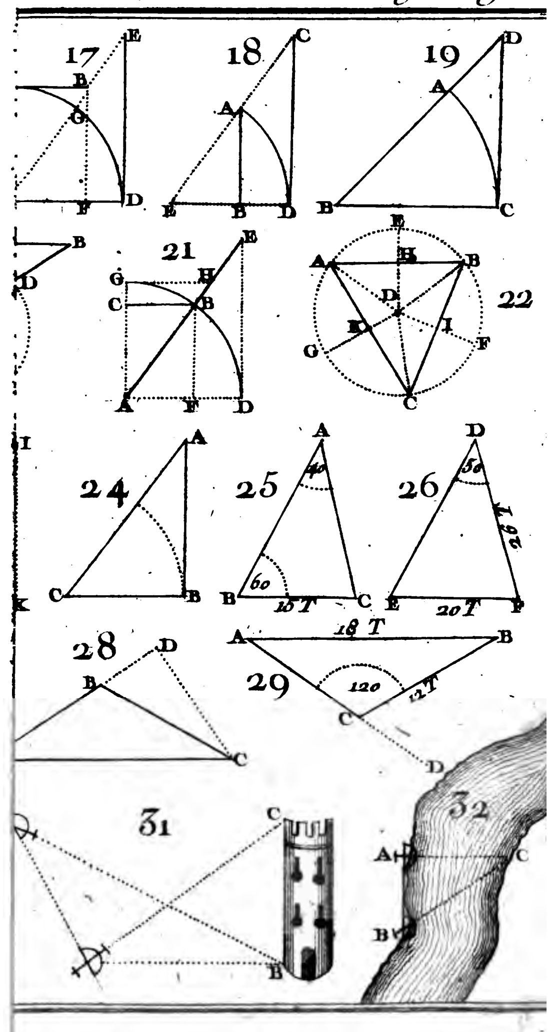
(*c*) Calcul Littéral, N. 233.
(*b*) Ibid. N. 256.

Ariste. Le plus grand agrément que les Mathématiques puissent me procurer, Eudoxe, ce sera de m'entretenir avec vous sur les choses qui s'y trouveront le plus de votre goût & du mien.

Fin du Tome second.




2
A
D
E
H
G
3
C
B
F
E
D
A
4
B
A
6
C
B
E
A
M
E
F
7
D
N
G
9
H
R
A
Q
B
O
N
C
P
I
L
M
F
D
E
C
C
A
13
B
C
A
D
12
B
N
C
K
15
M
O
L
H
F


17
E
B
G
F
D
18
C
A
E
B
D
19
D
A
B
C
B
D
21
E
G
H
C
B
A
F
D
E
A
H
B
22
D
I
F
G
C
I
A
24
C
B
K
A
25
40
60
B
15 T
C
D
26
50
26 T
E
20 T
F
28
D
B
C
A
18 T
B
29
120
12 T
C
D
31
C
B
32
A
C
B

34

E
A
C
F
B

G
A
H
D

38

I
K
F
B

O
F
C
H
B
E
D
G

B
E
D
F
42
A
G
C
D
E
L
K
F
H
L



26

APPROBATION.

J'Ay lû par Ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit intitulé : *Entretiens Mathématiques sur les Nombres, l'Algèbre, &c,* Par le R. P. REGNAULT : Et je n'y ai rien trouvé qui en puisse empêcher l'impression. A Paris ce 15. Février 1742.

CLAIRAUT.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la Grace de Dieu, Roy de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de Notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT ; Notre bien amé MICHEL-ANTOINE DAVID, Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public, *l'Histoire abregée des Troubles arrivés en Portugal dans le temps du détrônement du Roy Alphonse ; Entretiens Mathématiques sur les Nombres, l'Algèbre, &c. par le P. Regnault. Leçons d'Hydrostatique & d'Aérométrie, par M. Côtes ;* s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaire. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces présentes de fai-

re imprimer les Ouvrages cy-dessus spécifiés, en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de douze années consécutives, à compter du jour de la date desdites présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentations, corrections, changemens ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits & de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris & l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts : à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feüille imprimée & attachée pour modelle sous le contre-scel desdites présentes; que l'Impetrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725; & qu'avant que de

les exposer en vente, les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir ledit Exposant & ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Sécretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier, ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'éxécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le 8. jour du mois de Juin, l'an de grace mil sept cens quarante-deux, & de notre Régne le vingt-septiéme. Par le Roy en son Conseil,

SAINSON.

Registré sur le Registre de la Communau[té] des Libraires & Imprimeurs de Paris N°. 2428 conformément aux Réglemens, & notamment [à] l'Arrêt de la Cour du Parlement du 3. Décembr[e] 1705. A Paris ce 12 Juin 1742.

SAUGRAIN, *Syndic.*



fatzue